Sterne

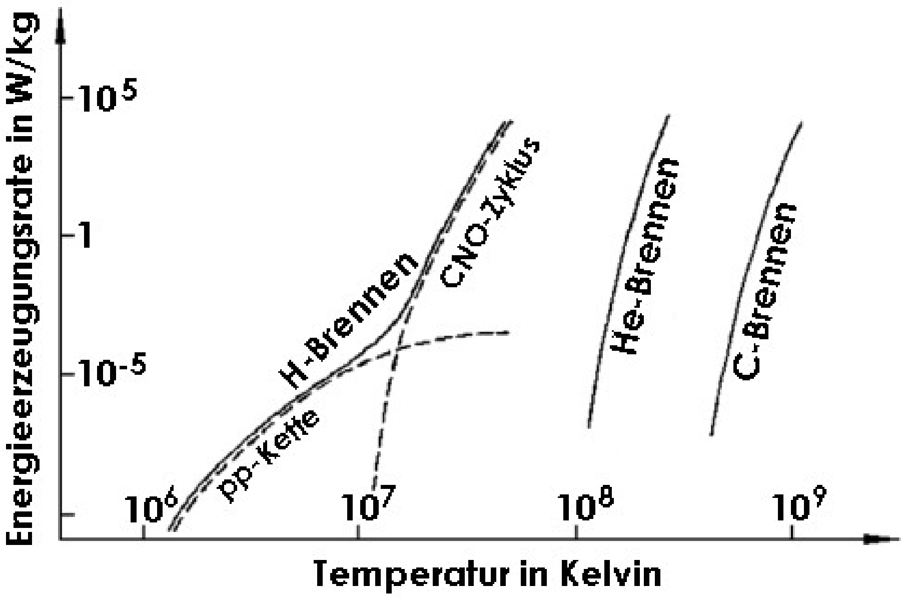
Allgemeine Eigenschaften

Grundlagen aus dem ersten Semester:
07-Eigenschaften der Sterne
Physikalische Rechenmethoden (Seite 177 - 195)

Sterne gehören zu den wichtigsten Objekten im Weltall: Ohne Sterne gäbe es kein Licht, keine Wärme und keine Elemente abgesehen von Wasserstoff.

1 Kernfusion

Die gesamte Energie, die in Sternen erzeugt wird, kommt durch Kernfusion zustande. Welche Kernfusion stattfinden kann und wie viel Energie dabei erzeugt wird, hängt vor allem von der Temperatur ab. (Beobachtungstechnisch ist zwar die Massenabhängigkeit interessanter, aber diese kommt nur dadurch zustande, das höhere Massen höhere Temperaturen im Inneren ermöglichen).



In dieser Grafik werden die möglichen Kernfusionen und die dabei erzeugbaren Energiemengen im Verhältnis zur Temperatur dargestellt. Man erkennt, dass ab einer Temperatur von 10^6K das Wasserstoffbrennen mittels pp-Kette möglich ist, ab dieser Temperatur können also Hauptreihensterne entstehen. Je höher die Temperatur wird, desto mehr Watt kann der Stern pro Kilogramm Wasserstoff so erzeugen. Ab einer Temperatur von 10^7K wird der CNO-Zyklus effektiver als die pp-Kette und das Wasserstoffbrennen wird auf diese Art fortgesetzt.

Ab einer Temperatur von 10^8K wird auch das Heliumbrennen möglich. Das bedeutet, sobald der Wasserstoff aufgebraucht ist, kann der Stern zu einem roten Riesen werden. Davor wird die Energie trotzdem durch den CNO-Zyklus erzeugt, weil dieser auf jeden Fall effektiver als das Heliumbrennen ist.

Das Fusionieren von Kohlenstoff oder noch schwereren Elementen, ist nur bei extrem hohen Temperaturen möglich, die nur in den wenigsten Sternen vorkommen. Alle anderen roten Riesen zerfallen nach dem Heliumbrennen zu einem weißen Zwerg.

In allen Fällen wird die durch Kernfusion erzeugte Energie vollständig in elektromagnetische Wellen umgewandelt. Wenn man also die Leuchtkraft eines Sterns in allen Wellenlängen betrachtet, ist sie nichts anderes als die Energieabgabe eines Sterns pro Zeit

$$L = \frac{E}{t} \tag{1.1}$$

Wenn man diese Formel nach der Zeit umformt, erhält man die Zeit, bis die gesamte durch die Kernfusion erzeugte Energie abgegeben wurde und der Stern entweder den nächsten Brennvorgang starten muss oder der Gravitation nichts mehr entgegensetzen kann und implodiert. Diese Zeit nennt man nukleare Zeitskala (τ_{nuk})

$$\tau_{nuk} = \frac{E}{L} \tag{1.2}$$

Die Energie wird ausschließlich aus dem Masseverlust des Sterns gewonnen. Wir können also in 1.2. die Einstein'sche Formel $E = mc^2$ einsetzen, wobei m in dem Fall für den Massenverlust steht

$$\tau_{nuk} = \frac{mc^2}{L} \tag{1.3}$$

Der Massenverlust hängt einerseits davon ab, wieviel leichter das Material nach der Fusion als vor der Fusion ist $(1 - \frac{M_{nach}}{M_{vor}})$. Andererseits wird nur der Teil des Materials fusioniert, der sich irgendwann während der Kernfusion in den Brennzonen, also den Zonen des Sterns, die heiß genug für die jeweilige Kernfusion sind, befindet (A_{fus}).

$$\tau_{nuk} = A_{Fus}(1 - \frac{M_{nach}}{M_{vor}})\frac{Mc^2}{L} \tag{1.4}$$

M steht in dem Fall für die Masse des Sterns und $A_{Fus}(1 - \frac{M_{nach}}{M_{vor}})$ ist der Anteil der verlorenen Masse an der Sternmasse, sodass dieser Faktor zusammen die verlorene Sternmasse angibt. Man kann mit dieser Formel sowohl die Lebensdauer von roten Riesen (Länge des Heliumbrennens), als auch die Lebensdauer von Hauptreihensternen (Länge des Wasserstoffbrennens) ausrechnen.

Bei Supernovae (Fusion jenseits von Eisen) lässt sich die Formel nicht anwenden, weil dort kein Massenverlust sondern eine Massenzunahme stattfindet und dadurch eine negative Energie herauskommt, die durch die ständige Implosion ausgeglichen wird. Das Leben einer Supernova wird also durch das Ende der Implosion begrenzt (für solche Implosionen werden wir uns im nächsten Abschnitt die Kelvin-Helmholtz-Zeitskala herleiten).

Bei braunen Zwergen (Deuteriumbrennen) funktioniert diese Formel auch nicht, weil das Deuterium von selbst zerfällt und dadurch immer neuer Brennstoff da ist. Dafür entsteht auch keine Energie, weil diese beim Zerfall wieder verlorengeht. Das Leben von braunen Zwergen wird also nur durch Kollission mit anderen Sternen beendet.

Bei Hauptreihensternen befindet sich im Schnitt 10% des Wasserstoff im Laufe der Entwicklung in den Brennzonen. Für A_{Fus} kann man in dem Fall also 0,1 einsetzen. Da Helium um 0,7% leichter als Wasserstoff ist, erhält man für Hauptreihensterne die Formel

$$\tau_{nuk} = 7x10^{-4} \frac{Mc^2}{L} \tag{1.5}$$

Um sich auszurechnen, wie lange die Kernfusion der Sonne dauert, muss man in diese Formel die Sonnenmasse und die Sonnenleuchtkraft einsetzen

$$\tau_{nuk} = 7x10^{-4} \frac{M_\odot c^2}{L_\odot} \tag{1.6}$$

Man erhält eine Zeit von 10^{10} Jahren. Diese Zeit kann man auch als Vorfaktor benutzen, wenn man zur Berechnung der nuklearen Zeitskala eines Hauptreihensterns problemorientierte Maßeinheiten verwenden möchte (Masse in Sonnenmassen, Leuchtkraft in Sonnenleuchtkräften und Zeit in Jahren)

$$\tau_{nuk} = \tau_{nuk\odot} \frac{M}{L} \tag{1.7}$$

Die Gültigkeit dieser Formel kann man sich leicht klarmachen, wenn man versucht die Masse und die Leuchtkraft wieder in SI-Einheiten auszudrücken

$$\tau_{nuk} = \tau_{nuk\odot} \frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \tag{1.8}$$

Wenn man jetzt für $\tau_{nuk\odot}$ die Formel 1.6. einsetzt, erhält man

$$\tau_{nuk} = 7x10^{-4} \frac{M_\odot c^2}{L_\odot} \frac{M/M_\odot}{L/L_\odot} \tag{1.9}$$

Dabei kürzt sich die Sonnenmasse und die Sonnenleuchtkraft heraus und man erhält wieder die Formel 1.5.

2 Implosion

Wenn keine Kernfusion mehr möglich ist, wirkt keine Kraft mehr nach außen und die Gravitation lässt den Stern so lange implodieren, bis entweder die Temperatur wieder hoch genug ist, um eine weitere Kernfusion zu starten oder der Druck so hoch ist, dass sich die Teilchen nicht weiter zusammenpressen lassen.

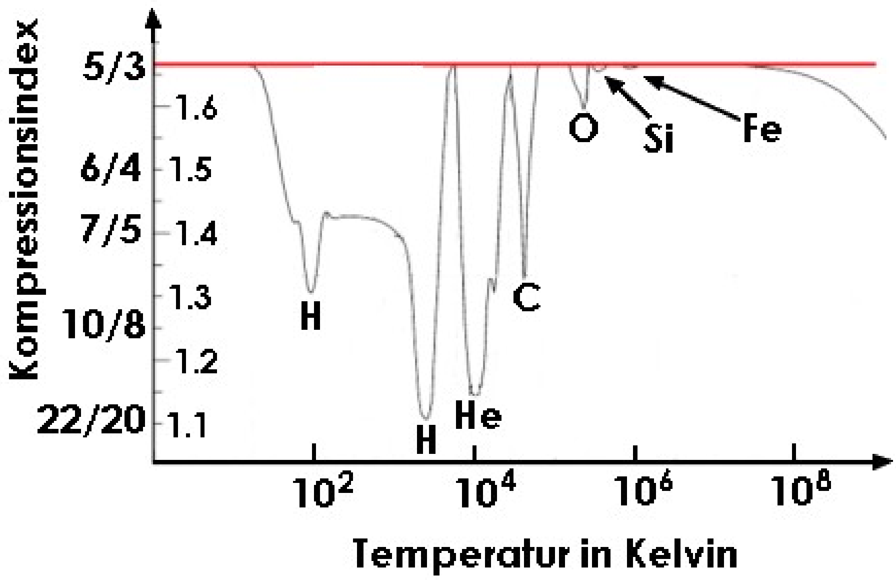
Wie weit sich die Teilchen zusammenpressen lassen, hängt vom sogenannten Kompressionsindex (Γ_1) ab. Dieser berechnet sich mit der Formel

$$\Gamma_1 = \frac{f+2}{f} \tag{2.1}$$

wobei f die Anzahl der Freiheitsgrade, also der möglichen Bewegungen ist. Beispielsweise hat ein Material das nur aus Atomen (also nicht aus Molekülen) besteht drei Freiheitsgrade, weil sich jedes Atom in drei Richtungen bewegen kann (rechts/links, vorne/hinten und oben/unten). Der Kompressionsindex ist daher $\frac{5}{3}$

Befinden sich auch Moleküle im Material wird die ganze Sache komplexer, denn sie können sich auch verformen, indem die Atome in den Molekülen unterschiedliche Stellungen einnehmen. Es gibt folglich mehr Freiheitsgrade und der Kompressionsindex wird niedriger.

Die Kompressibilität eines Sterns ist von der Zusammensetzung und von der Temperatur abhängig.



In dieser Grafik ist der Kompressionsindex eines typischen Sterns in Bezug auf seine Temperatur aufgetragen. Die rote Linie befindet sich beim maximal möglichen Kompressionsindex von $\frac{5}{3}$ (ein höherer Kompressionsindex ist nicht möglich, weil es immer mindestens drei Freiheitsgrade gibt).

Bei niedrigen Temperaturen ist der Kompressionsindex $\frac{5}{3}$, weil sich alle Moleküle in festen Molekülbindungen befinden, in denen sich die Atome nicht relativ zueinander bewegen. Je heißer es wird, desto beweglicher werden die Teilchen.

Bei einer Temperatur von 100 Kelvin beginnen sich die Wasserstoffatome zu drehen - Der Abstand zwischen ihnen bleibt jedoch gleich. Es entsteht der weniger tiefe Wasserstoffpeak. Bei einer Temperatur von 1.000 Kelvin kann sich auch der Abstand zwischen den Wasserstoffatomen ändern. Dadurch hat der Wasserstoff noch mehr Freiheitsgrade und der Peak wird tiefer. Bei 5.000 Kelvin geben die Wasserstoffatome die Molekülbindung ganz auf und die Kompressibilität geht wieder zurück auf $\frac{5}{3}$

Der ganze Vorgang wiederholt sich bei noch höheren Temperaturen für noch schwerere Elemente. Bei welchem Element der Kompressionsindex wie groß ist, kann man sich mit der Sahagleichung ausrechnen.

$$\Gamma_1 = \frac{\rho}{P}\frac{\delta P}{\delta \rho} \tag{2.2}$$

In dieser Formel kommt zwar die Temperatur nicht vor, aber Druck, Dichte und die Ableitung des Drucks nach der Dichte hängen eng mit der Temperatur zusammen. Diese Formel benötigt man selten, weil fast alle Moleküle bereits in Kompressionstabellen eingetragen sind.

Da ein typischer Stern hauptsächlich aus Wasserstoff und Helium besteht, wirken sich die Peaks dieser Materialien auch am stärksten auf den Kompressionsindex des Sterns aus.

Bei einer Temperatur von 10^8K sind nicht einmal die Elektronen innerhalb der Atome stabil. Bei so hohen Temperaturen geht der Kompressionsindex dadurch zurück.

Die Zeitdauer, wie lange die Implosion dauert, bezeichnet man als Kelvin-Helmholtz-Zeitskala (τ_{KH}). Um sich diese auszurechnen, kann man die Formel für die Fallbeschleunigung verwenden.

$$a = \frac{GM^2}{R} \tag{2.3}$$

Allerdings wird die Fallbeschleunigung durch die restliche Energie der zuvor stattgefundenen Kernfusion aufgehalten (Die durch die Kernfusion erzeugte Energie entweicht erst mit Verzögerung. Dadurch wird auch noch lange nach der Kernfusion Energie in Form von Leuchtkraft abgegeben).

Diese Energie hält die Fallbeschleunigung auf, man muss also die Formel für die Fallbeschleunigung durch die Leuchtkraft dividieren.

$$\tau_{KH} = \frac{GM^2}{RL} \tag{2.4}$$

Da man Masse und Radius eines Sterns nicht immer bestimmen kann, ist es oft sinnvoll, statt der Formel für die Fallbeschleunigung die thermische Energie einzusetzen. Diese lässt sich aus dem Virialsatz abeleiten.

$$\tau_{KH} = \frac{E_{therm}}{L} \tag{2.5}$$

Beide Formeln kann man für alle Sternkontraktionen anwenden: Für die Kontraktion von Protosternen zu braunen Zwergen, für die Kontraktion von Hauptreihensternen oder roten Riesen zu weißen Zwergen und für alle Arten von Supernovae.

Man könnte jetzt wieder auf die Idee kommen, in Formel 2.3. die Sonnenmasse, den Sonnenradius und die Sonnenleuchtkraft einzusetzen.

$$\tau_{KH} = \frac{GM_{\odot}^2}{R_{\odot} L_{\odot}} \tag{2.6}$$

Man kommt dabei auf eine Zeit von $2x10^7$ Jahren. So lange würde die Implosion der Sonne dauern, wenn aus irgendeinem Grund das Wasserstoffbrennen in der Sonne aufhören würde. Das ist natürlich unsinnig, denn das wird nicht passieren.

Der Grund, wieso diese Zahl trotzdem relevant ist, ist, dass man sie analog wie bei der nuklearen Zeitskala als Vorfaktor verwenden kann, wenn man problemorientе Größen (Sonnenmasse, Sonnenradius, Sonnenleuchtkraft und Jahre) verwenden möchte. Man kommt dabei auf die Formel

$$\tau_{KH} = 2x10^7 \frac{M^2}{RL} \tag{2.7}$$

3 Transportzeitskalen

Die Transportzeitskalen geben die Durchlaufzeit einer Strahlung, eines Teilchens oder einer Druckwelle durch einen Stern an. Es gibt dabei zwei Möglichkeiten für Durchläufe:

- Der Durchlauf mithilfe der Teilchen des Sterns: Beispiele dafür sind Schalllaufzeit, Wärmeleitung und Konvektion. Diese werden durch die Bewegungen der Teilchen übertragen, das heißt die Übertragung ist ohne Teilchen nicht möglich.

- Der Durchlauf durch die Teilchen des Sterns: Ein Beispiel dafür ist die elektromagnetische Strahlung. Diese wird ohne Medium zwischen den Teilchen des Sterns übertragen, die Teilchen sind dabei sogar im Weg.

Für diese zwei Prozesse gibt es zwei unterschiedliche Transportzeitskalen. Diese werden am Beispiel der Schalllaufzeit und des Strahlungstransports behandelt.

Schalllaufzeit

Die Schalllaufzeit gibt an, wie lange der Schall benötigt, um den Stern zu durchlaufen.

Der Schall wird übertragen, indem ein Teilchen an das andere anstößt. Je dichter das Material ist, desto mehr Stöße benötigt der Schall für denselben Weg. Die Schallgeschwindigkeit nimmt also mit der Dichte ab. Mit zunehmendem Druck wird die Schallgeschwindigkeit höher. Insgesamt lautet die Formel

$$c_s = \sqrt{\frac{P}{\bar{\rho}}} \tag{3.1}$$

Strahlungstransport

Der Strahlungstransport (τ_{rad}) gibt an, wie lange es dauert, bis die im Stern erzeugte Strahlung abgestrahlt wird. Im Stern befinden sich viele Teilchen, die die Strahlung aufhalten. Entweder sie werden gestreut, wodurch die Teilchen dauernd ihre Richtung ändern und viele Umwege machen oder sie wird ganz absorbiert. Durch die absorbierte Strahlung ist es möglich, dass die Atome später Linienstrahlung abgeben (Beim Strahlungstransport betrachtet man das als eine Strahlung die sich zwischen Absorption und Abgabe der Linienstrahlung im Atom aufhält).

Insgesamt ist die Verzögerung beim Durchlauf durch den Stern so groß, dass die Photonen 100.000 Jahre brauchen, um den Stern zu verlassen, obwohl sie mit Lichtgeschwindigkeit fliegen. Der Strahlungstransport dauert länger, wenn der Radius des Sterns größer ist und wird schneller, wenn die mittlere freie Weglänge größer ist, also wenn weniger Teilchen im Weg stehen. Insgesamt lautet die Formel

$$\tau_{rad} \sim \frac{R^2}{c\frac{1}{3}l_{mfp}} \tag{3.2}$$

l_{mfp} steht in dieser Formel für die mittlere freie Weglänge (vom englischen „mean free path“). Den Wert unter dem Bruchstrich bezeichnet man auch als Diffusionskoeffizient D, damit kann man die Formel auch schreiben als

$$\tau_{rad} \sim \frac{R^2}{D} \tag{3.3}$$

Durch Umformen der Gleichung nach D erhält man

$$D \sim \frac{R^2}{\tau_{rad}} \tag{3.4}$$

Der Diffusionskoeffizient ist also proportional zur Fläche, auf das sich die Strahlung einer Stelle pro Sekunde ausbreitet.

Wenn man den Diffusionskoeffizienten für einen anderen Transport ausrechnen möchte, gibt man statt der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts die Ausbreitungsgeschwindigkeit dieses anderen Objekts an. Die anderen Eigenschaften bleiben aufrecht. (Die anderen Objekte werden zwar nur gestreut und nicht absorbiert, aber da Absorption und Streuung ungefähr gleich viel Zeit wegnehmen, fälllt das nicht ins Gewicht)

4 Ratengleichungen

Die Ratengleichungen geben an, wie schnell sich die chemische Zusammensetzung von Sternen ändert. Wichtige Beispiele dafür sind die Nukleare Reaktionsrate und die Energieproduktion.

Die nukleare Reaktionsrate gibt an, wie viele Stoffe pro Sekunde fusioniert werden. Wenn man die Anzahl der zu fusionierenden Stoffe durch die nukleare Reaktionsrate dividiert, erhält man die nukleare Zeitskala.

Die Energieproduktion gibt an, wieviel Energie pro Sekunde erzeugt wird.

5 Sternaufbaugleichungen

Die Sternaufbaugleichungen dienen dazu, zu beschreiben, wie sich die wichtigsten Eigenschaften der Sterne mit dem Radius ändern

Integrierte Masse

Die integrierte Masse (m) gibt an, wie viel Masse der Stern innerhalb des Radius r hat. Allgemein gilt

$$m = V\rho \tag{5.1}$$

Wir gehen davon aus, dass die Dichte des Sterns konstant ist. Für das Volumen können wir die Volumsformel der Kugel mit Radius r einsetzen. So erhalten wir

$$m = \frac{4\pi r^3 \rho}{3} \tag{5.2}$$

Durch Ableitung der Formel nach r erhält man:

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{5.3}$$

Druck

Der Druck (P) ist die Kraft, mit der sich ein Material gegen das zusammengedrückt werden sträubt.

Damit ein Stern stabil ist, muss die nach innen wirkende Kraft genauso groß wie die nach außen wirkende Kraft sein

$$F_{\text{außen}} = -F_{innen} \tag{5.4}$$

Das Minus kommt daher, dass die Kräfte in die entgegengesetzte Richtung wirken. Man bezeichnet den Stern in diesem Fall als im hydrostatischen Gleichgewicht befindlich.

Nach außen wirkt der Druck, aber nur so stark, wie er sich nach innen verändert, weil der Rest von den darüber befindlichen Teilchen ausgeglichen wird.

$$F_{\text{außen}} = \frac{dP}{dr} \tag{5.5}$$

Nach innen wirkt die Gravitationskraft (Newtonsches Gravitationsgesetz einsetzen) mal der Dichte, denn je mehr Material über der Kugel mit Radius r ist, desto stärker drückt es nach innen.

$$F_{innen} = \frac{Gm\rho}{r^2} \tag{5.6}$$

Wenn man 5.5. und 5.6. in 5.4. einsetzt, erhält man die Formel für die Radiusänderung des Impulses

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho}{r^2} \tag{5.7}$$

Leuchtkraft

Die Leuchtkraft eines Sterns wird durch die Energie der Kernfusion ermöglicht. Die so erzeugte Energie pro Gramm und pro Sekunde wird mit der Energieerzeugungsrate (ϵ) angegeben. Um die in der gesamten Kugel erzeugte Energie auszurechnen, muss man die Energieerzeugungsrate mit der gesamten Masse des Sterns multiplizieren.

$$L = M\epsilon \tag{5.8}$$

Für die Masse können wir Formel 5.2. einsetzen und erhalten:

$$L = \frac{4\pi r^3 \rho\epsilon}{3} \tag{5.9}$$

Wir gehen davon aus, dass Dichte und Energieerzeugungsrate im gesamten Stern konstant sind. Dadurch erhalten wir nach der Ableitung

$$\frac{dL}{dr} = 4\pi r^2 \rho\epsilon \tag{5.10}$$

Temperatur

Die Temperatur (T) entspricht der Geschwindigkeit der Teilchen innerhalb eines Sterns. Sie kann bekanntlich durch Wärmeleitung, Konvektion oder Strahlung weitergegeben werden. Da Wärmeleitung und Konvektion in der Regel vernachlässigbar klein im Vergleich zur Strahlung sind, genügt es, mit der Strahlung zu rechnen.

Die Diffusion der Strahlung kann man mit der Formel für den Diffusionskoeffizient ausrechnen:

$$D = c\frac{1}{3}l_{mfp} \tag{5.11}$$

Für l_{mph} kann man in diese Formel den Kehrwert aus der Häufigkeit der Extinktionen, also den Kehrwert aus dem Extinktionskoeffizienten mal der Dichte einsetzen

$$D = \frac{c}{3k_\nu \rho} \tag{5.12}$$

Um auf die Formel für den Strahlungsfluss zu kommen, muss man diese Formel mit der Strahlungsdichte multiplizieren und erhält so

$$\frac{L}{4\pi r^2} = \frac{c}{3k_\nu \rho}\frac{d}{dr}(\frac{4\sigma T^4}{c}) \tag{5.13}$$

Die konstanten Faktoren kann man aus der Ableitung herausziehen, weil sie sich beim Ableiten nicht verändern. Dann kann man die Formel nach $\frac{T^4}{dr}$ umstellen:

$$\frac{T^4}{dr} = \frac{3k_\nu \rho L}{16\pi\sigma r^2} \tag{5.14}$$

Wenn man hier die Kettenregel anwendet, ist die äußere Ableitung $4T^3$ und die innere Ableitung $\frac{dT}{dr}$. Wenn man die Gleichung auf beiden Seiten durch die äußere Ableitung dividiert, erhält man somit

$$\frac{dT}{dr} = \frac{3k_\nu \rho L}{64\pi\sigma r^2 T^3} \tag{5.15}$$

6 Lösungsversuche der Sternaufbaugleichungen

Nachdem wir es geschafft haben, integrierte Masse, Druck, Leuchtkraft und Temperatur nach dem Radius abgeleitet anzugeben, könnte man auf die Idee kommen, die Gleichungen nach dem Radius zu integrieren, um Formeln für Masse, Druck, Leuchtkraft und Temperatur des gesamten Sterns zu erhalten. Das ist jedoch nicht so einfach möglich, weil in allen Formeln Größen vorkommen, die ihrerseits vom Radius abhängig sind.

Diese Größen sind die Dichte, die Energieerzeugungsrate und der Extinktionskoeffizient

Dichte: Die Dichte wird naheliegenderweise größer, wenn der Druck stärker wird, weil dann die Teilchen stärker zusammengedrückt werden. Mit steigender Temperatur nimmt die Dichte ab, weil die Teilchen schneller werden und daher mehr Platz benötigen. Wenn man annimmt, dass der Stern aus einem näherungsweise idealem Gas besteht, erhält man:

$$\rho = \frac{\mu P}{RT} \tag{6.1}$$

In dieser Formel steht P für den Druck, R für den Radius, T für die Temperatur und μ für das mittlere Molekulargewicht, also das Gewicht, dass ein Molekül des Gases durchschnittlich wiegt.

Energieerzeugungsrate: Die Energieerzeugungsrate nimmt mit zunehmender Dichte zu, weil dann die Wahrscheinlichkeit einer Kernfusion durch mehr vorhandene Kerne erhöht wird. Auch durch die Temperatur nimmt die Energieerzeugungsrate zu, weil dann die Teilchen beweglicher sind und die Wahrscheinlichkeit, dass sie zusammentreffen, größer ist. Die Energieerzeugung steigt in Form einer Potenzfunktion, weil die Kernfusion Temperatur und Dichte erhöhen und diese wiederum die Kernfusion beschleunigen.

$$\epsilon_n = \epsilon_0 \rho^m T^k \tag{6.2}$$

ϵ_0 ist dabei die Energieerzeugungsrate zu Beginn des Prozesses. Die Potenzen m und k sind für unterschiedliche Fusionsvorgänge unterschiedlich groß.

Extinktionskoeffizient: Der Extinktionskoeffizient wurde bereits im Kapitel über Strahlungsänderungen behandelt.

Zusammenfassend sind alle in den Differentialgleichungen vorkommenden Größen nur von Druck, Temperatur, Leuchtkraft und integrierter Masse abhängig. Wir können daher die Sternaufbaugleichungen als Differentialgleichungssystem mit 4 Gleichungen und 4 Unbekannten auffassen. Ein derartiges Differentialgleichungssystem ist nur dann analytisch lösbar, wenn alle Differentialgleichungen linear sind.

Um die Differentialgleichungen zu lösen, benötigt man daher numerische Näherungen. Das bedeutet, man probiert unterschiedliche Gleichungen aus, indem man sie einsetzt und sich die Abweichungen von einer einheitlichen Lösung anschaut. Dann versucht man die Gleichung so zu verändern, dass die Abweichungen kleiner werden, indem man unterschiedliche Terme verkleinert oder vergrößert. Je näher man der Lösung gekommen ist, desto geringfügiger ändert man die einzelnen Terme, bis man die Lösung genau erreicht (oft nur im Limes einer unendlich langen Folge von Termen).

Auch das ist jedoch nicht für alle Sterne möglich, weil man zunächst ausreichend Anfangsbedingungen kennen muss.

Anfangsbedingungen

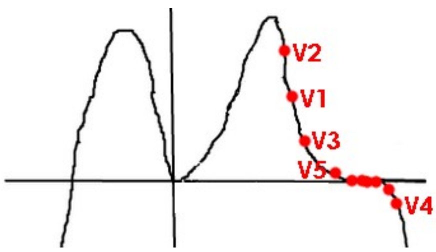
Im stellaren Zentrum, also für r=0 gilt, dass die integrierte Masse 0 ist, weil keine Masse mehr innerhalb Platz hat. Außerdem wirkt hier der Zentraldruck (P_c) und die Zentraltemperatur (T_c)

Den Rand des Sterns definiert man dort, wo der Rand der Photosphäre ist (r=R_{Ph}), also wo der Stern zu Leuchten aufhört. Die Leuchtkraft ist an dieser Stelle folglich Null. Der Druck ist nicht ganz Null, weil Flares, Jets und Sternwinde in die Sternkorona vordringen und ebenfalls einen Druck ausüben. Man nennt den dortigen Druck P_{Ph}. Die Temperatur entspricht der Oberflächentemperatur des Sterns. Man nennt diese Effektivtemperatur T_{eff}. Die integrierte Masse am Rand entspricht der Sternmasse M.

Die Größen T_c, P_c, R_{Ph}, P_{Ph}, T_{eff} und M kennt man entweder durch Beobachtung, oder man schätzt sie im Vergleich zu ähnlichen Sternen ab.

Weiters gibt es keine Randwertbedingungen für Ableitungen nach r. Deshalb hat man zwei Verfahren entwickelt, um diese Werte herauszufinden: Das Schießverfahren und das Newtonverfahren.

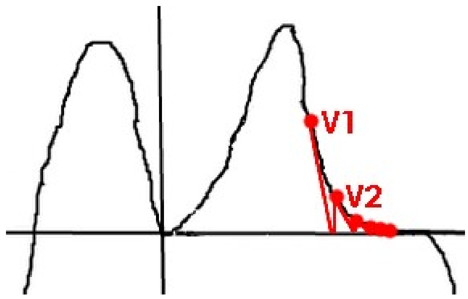
Das Schießverfahren ist eine spezielle Form der numerischen Lösung. Dabei muss man die Randbedingungen für die Ableitungen erraten, indem man diese integriert und sich die Abweichung von einer unabgeleiteten Randbedingung anschaut. Dann versucht man eine Zahl die ein bisschen größer oder ein bisschen kleiner ist und schaut, ob dabei die Ableitungen größer oder kleiner werden. Man geht in die Richtung in der sie kleiner werden und verringert die Differenz, wenn man in der Nähe der Lösung ist. Am Ende erhält man entweder eine rationale Zahl, bei der sich die Lösung ausgeht oder man erreicht im Limes eine irrationale Zahl.



In dieser Grafik sieht man den typischen Verlauf eines Schießverfahrens. Beim ersten Versuch probiert der Forscher irgendwas und erhält dadurch auch irgendeine Abweichung. Beim zweiten Versuch probiert er es mit einer kleineren Zahl und erhält dabei eine größere Abweichung. Also versucht er es beim dritten Versuch mit einer größeren Zahl und die Abweichung wird kleiner. Um die Abweichung noch weiter zu minimieren, versucht er es beim vierten Versuch mit einer noch größeren Zahl. Jetzt ist die Abweichung in eine andere Richtung. Also muss eine Lösung dazwischen liegen und ab Versuch 5 nimmt der Forscher immer ein Ergebnis dazwischen, um das Intervall immer weiter zu verringern. Dass er dabei nur eine Lösung erhält spielt keine Rolle, weil er auch nur eine Randwertbedingung benötigt.

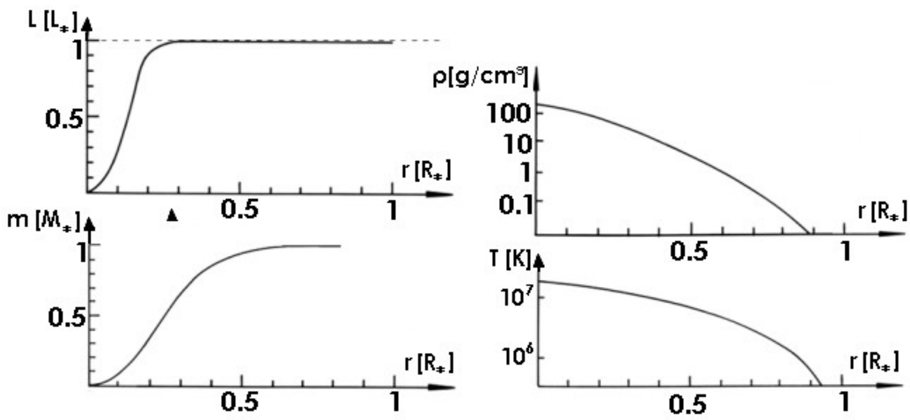
Diese stetigen Funktionen erhält man jedoch nur bei besonders einfachen Hauptreihensternen für den Zentraldruck und die Zentraltemperatur. Für alle anderen Sterne kann man dieses Verfahren nicht verwenden. Deshalb wurde es im Jahr 1960 durch ein anderes Verfahren abgelöst.

Dieses Verfahren heißt Newtonverfahren. Auch beim Newtonverfahren wird zunächst ein Funktionswert erraten. Dann rechnet man sich den Schnittpunkt der Tangente mit der Achse aus und versucht es bei diesem Schnittpunkt. Auch an dieser Stelle bildet man die Tangente und schaut, wo sie die Achse schneidet. Auf diese Weise nähert man sich der Lösung schneller als mit dem Schießverfahren.



In dieser Grafik probiert der Forscher sich mit dem Newtonverfahren der selben Lösung zu nähern. Man erkennt, dass er weniger Versuche als zuvor benötigt um dieselbe Genauigkeit zu erhalten.

Heutzutage sucht man diese Lösungen natürlich mit dem Computer. Selbst für die ist es meist ein Problem eine Lösung zu finden, so dass man nur für einfache Sterne eine Lösung findet. Man versucht zudem die Lösungen stets mit mehreren unterschiedlichen Computerprogrammen zu erhalten, um sicher zu sein, dass kein Programmierfehler vorliegt.



In dieser Grafik sind die Lösungen für einfache Hauptreihensterne dargestellt. Man erkennt, dass die integrierte Masse am Anfang stark ansteigt und sich dann immer langsamer der Gesamtmasse des Sterns nähert. Das ist auch logisch, weil die Dichte im Zentrum am höchsten ist und nach außen abnimmt. Auch das ist nicht überraschend, weil der Druck ebenfalls innen am stärksten ist. Die Temperatur beträgt im Sternzentrum typischerweise mehr als 10 Millionen K und fällt nach außen hin stark ab. Die Leuchtkraft entspricht fast überall der Gesamtleuchtkraft des Sterns, nur im Zentrum geht sie zurück

Zustandsgleichungen

Man hat zwar noch keine Möglichkeit gefunden, eine Formel für den Zusammenhang zwischen Druck, Temperatur, Dichte und integrierte Masse zu finden, die man auf alle Sterne anwenden kann, für spezielle chemische Zusammensetzungen, die auch in Sternen näherungsweise vorkommen, allerdings schon. Diese Gleichungen nennt man Zustandsgleichungen oder kurz EOS (für Equation of State)

Ein wichtiges Beispiel für Zustandsgleichungen, sind jene Zustandsgleichungen, die sich auf ideale Gase beziehen, weil sich viele Gase als ideal nähern lassen.

7 Leuchtkraft

Die Leuchtkraft eines Sterns kann auf zwei unterschiedliche Arten zustandekommen: Einerseits entsteht sie durch die Energie, die bei der Kernfusion erzeugt wird (Fusionsleuchtkraft L_{fus}), andererseits entsteht sie durch die Energie des Materials, dass vom Stern durch die Gravitation angezogen wird. (Akkretionsleuchtkraft L_{akk})

Akkretionsleuchtkraft

Die Akkretionsleuchtkraft hängt sowohl von der Massenzunahme des Sterns pro Zeiteinheit $\dot{M}$ (der akkretierten Masse) als auch von Masse M und Radius R des Sterns ab.

$$L_{akk} = \frac{GM\dot{M}}{R} \tag{7.1}$$

Je mehr Material der Stern also akkretiert, desto leuchtkräftiger wird er. Mit zunehmender Leuchtkraft nimmt jedoch auch der Strahlungsdruck zu und dieser verringert die Akkretionsrate. Die Leuchtkraft bei der der Strahlungsdruck so hoch ist, dass der Stern keine Masse mehr akkretieren kann, bezeichnet man als Eddingtonleuchtkraft. Diese ist die höchstmögliche Akkretionsleuchtkraft eines Sterns.

Um herzuleiten, wie hoch die Eddingtonleuchtkraft ist, berechnen wir die Wahrscheinlichkeit, dass ein Materieteilchen von einem Photon weggedrückt wird. Das hängt von der Anzahl der Photonen und dem Wirkungsquerschnitt (also dem Gebiet, auf dem ein Photon Druck ausübt) ab.

Die Anzahl der Photonen lässt sich aus der Leuchtkraft bei einer bestimmten Frequenz ausrechnen:

$$n_{Ph} = \frac{L_\nu}{4r^2\pi ch\nu} \tag{7.2}$$

In dieser Formel steht n_{Ph} für die Photonendichte, L_ν für die Leuchtkraft bei der Wellenlänge ν und c für die Geschwindigkeit des Photons. hν gibt die Energie des Photons und $r^2\pi$ die Fläche eines Kreises an.

Der Wirkungsquerschnitt hängt von der Durchsichtigkeit des Materials ab. Allgemein gilt: Je durchsichtiger ein Material ist, desto kleiner ist der Wirkungsquerschnitt. Um die Leuchtkraft zu erhalten, bei der überhaupt kein Material mehr akkretiert werden kann, verwenden wir für unsere Berechnungen ein Material mit dem kleinstmöglichen Wirkungsquerschnitt (also ein vollständig durchsichtiges Material). Für dieses Material gilt

$$\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \tag{7.3}$$

wobei r_e den klassischen Elektronenradius bezeichnet. Setzt man diesen ein erhält man eine Fläche von $6,7x10^{-25}cm^2$.

Die Streurate ist die Photonendichte mal dem Wirkungsquerschnitt mal der Geschwindigkeit der Photonen (denn je schneller die Photonen fliegen, desto höher ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Teilchen zusammen zu stoßen. Nur weil die Teilchen gestreut werden, bedeutet das aber noch nicht, dass die Teilchen nicht akkretiert werden. Dafür ist es notwendig, dass der Impuls der Photonen so hoch ist, dass die Teilchen aus dem gravitativen Einflussbereich des Sterns geschleudert werden.

Die Formel für den Impuls, den ein Photon pro Zeiteinheit überträgt lautet

$$\frac{dp}{dt} = \frac{h\nu}{c} \tag{7.4}$$

Multipliziert man diesen Impuls mit der Streurate, erhält man den Impuls, der insgesamt auf die akkretierte Masse von den Photonen einer Frequenz übertragen wird.

$$\frac{L_\nu \sigma_T}{4\pi r^2 c} \tag{7.5}$$

Um den Impuls aller Photonen zu erhalten, muss man den Impuls bei allen Frequenzen aufadieren. Da nur die Leuchtkraft von der Frequenz abhängig ist, genügt es diese durch die Gesamtleuchtkraft zu ersetzen.

$$F_{\text{außen}} = \frac{L\sigma_T}{4\pi r^2 c} \tag{7.6}$$

Man erhält somit die gesamte Kraft die nach außen wirkt. Damit keine Massenakkretion mehr stattfindet, muss diese nach außen wirkende Kraft stärker als die nach innen wirkende Gravitation sein

$$\frac{L\sigma_T}{4\pi r^2 c} > \frac{GMm}{r^2} \tag{7.7}$$

Da die Elektronenmasse im Vergleich zur Protonenmasse vernachlässigbar klein ist, kann man statt m die Protonenmasse einsetzen

$$\frac{L\sigma_T}{4\pi r^2 c} > \frac{GMm_p}{r^2} \tag{7.8}$$

Umformen der Gleichung nach der Leuchtkraft liefert

$$L_{Edd} > \frac{4\pi cGMm_p}{\sigma_T} \tag{7.9}$$

Wenn man alle Konstanten einsetzt, hängt die Eddington-Leuchtkraft nur noch von der Masse des Sterns ab

$$L_{Edd} = 3,3x10^4 M \tag{7.10}$$

Wobei man die Masse in Sonnenmassen einsetzt und die Leuchtkraft in Sonnenleuchtkräften erhält.

Fusionsleuchtkraft

Die Leuchtkraft, die durch die Kernfusion entsteht, hängt von der Art und von der Geschwindigkeit der Kernfusion ab. Beim Heliumbrennen in Hauptreihensternen entsteht eine ganz andere Energie als beim Kohlenstoffbrennen in roten Riesen oder bei der Kernfusion in Supernovae. Die unterschiedlichen Fusionsreaktionen und die dabei frei werdende Energie werden in den passenden Kapiteln beim Materiekreislauf genauer beschrieben.

Die Eddingtonleuchtkraft stellt auch bei der Fusionsleuchtkraft eine Grenze dar, denn sobald diese überschritten wird, beginnt eine negative Massenakkretion. Dabei wird der Stern kleiner und der Druck, der die Kernfusion beschleunigt, geringer. Dieser Vorgang dauert so lange an, bis die Kernfusion langsam genug ist, um keine Kernfusion oberhalb des Eddington-Limits zu erzeugen.

8 Strahlungstransport

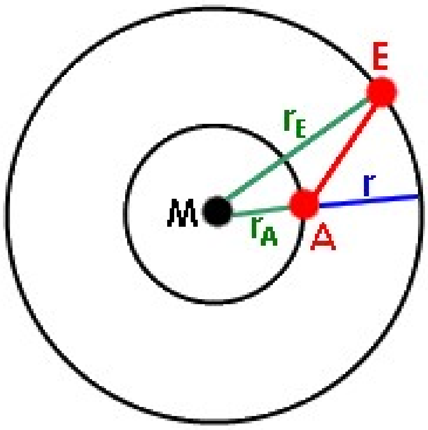
Bei Sternen mit einer hohen Temperatur werden die Photonen fast ausschließlich durch Strahlung übertragen. In diesem Fall nennt man die Sterne radiativ. Wenn die Temperatur der Sterne niedriger ist, spielt auch die Konvektion eine Rolle. Dann nennt man die Sterne konvektiv. Die Wärmeleitung ist bei Sternen generell vernachlässigbar.

Die Untersuchung des Strahlungstransportes ist deshalb interessant, weil es dadurch möglich wird, aus den Eigenschaften der ankommenden Strahlung dann auch auf den Aufbau im inneren des Sternes, den man nicht direkt beobachten kann, zu schließen.

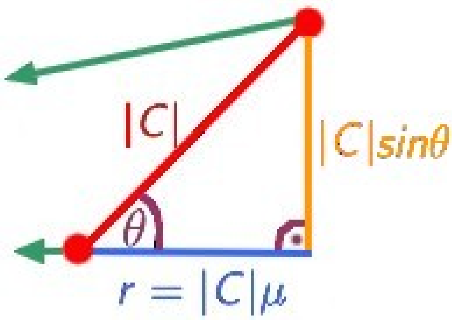
Charakteristiken

Wenn Licht weder gestreut noch absorpiert wird, bewegt es sich bekanntlich geradlinig fort. Das ist im Stern über kurze Distanzen zwischen den einzelnen Teilchen möglich. Diese geraden Linien nennt man Charakteristiken. Der Weg der Strahlung aus dem Stern setzt sich aus ganz vielen kurzen Charakteristiken zusammen.

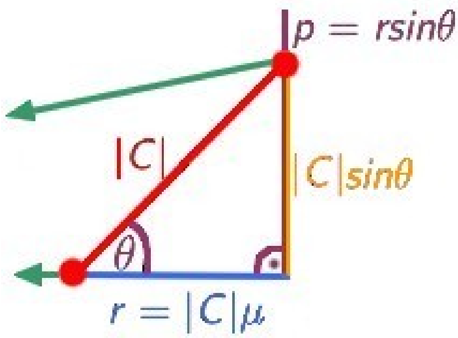
Um die Strahlungstransportgleichung aufzustellen, benötigt man drei Größen: r, p und μ.



r: Man verbindet sowohl den Anfangspunkt (A) als auch den Endpunkt (E) der Charakteristik (in der Grafik rot dargestellt) geradlinig mit dem Mittelpunkt. Diese Linien sind in der Grafik grün dargestellt. Dann zieht man die Länge der Linie des Anfangspunktes von der Länge der Linie des Endpunktes ab (in der Grafik blau dargestellt). Intuitiv gibt r an, wie weit sich das Teilchen während einer Charakteristik nach außen (bzw. innen mit einem Minuszeichen) bewegt.



μ: Man betrachtet den Winkel zwischen der Charakteristik und der geradlinigen Verbindung zwischen Anfangspunkt und Endpunkt (θ). Den Cosinus von θ nennt man μ. Dieser läuft auf der selben Strecke wie r wird aber in Charakteristikenlängen skaliert (in der Grafik blau dargestellt).



p: Wenn man den Sinus von θ betrachtet, erhält man eine Strecke die normal auf den Radius des Anfangspunktes steht und diesen mit dem Endpunkt verbindet (in der Grafik orange dargestellt). Skaliert ist diese Strecke weiterhin in Charakteristikenlängen. Wenn man diese Formel mit r multipliziert, erhält man p (in der Grafik lila dargestellt). Die lila Linie ist immer länger als die orange Linie, weil r nie länger als die Länge der Charakteristik ist.

Nun wollen wir eine Beziehung zwischen p, r und μ herstellen. Dafür verwenden wir den Satz von Pythagoras

$$cos^2\theta + sin^2\theta = 1 \tag{8.1}$$

Umformen nach $sin\theta$ gibt:

$$sin\theta = \sqrt{1 - cos^2\theta} \tag{8.2}$$

In diese Formel kann man die Definition von μ einsetzen:

$$sin\theta = \sqrt{1 - \mu^2} \tag{8.3}$$

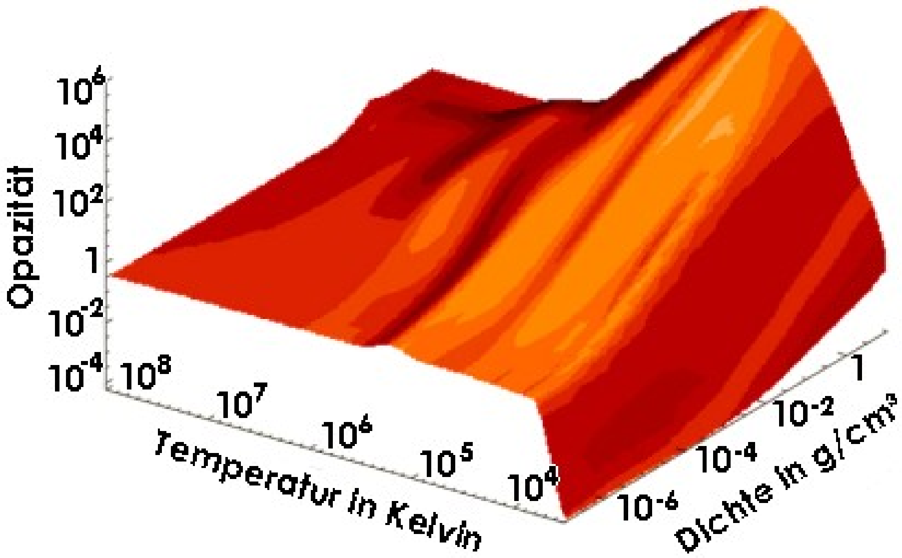
Diese Formel setzen wir in die Definition von p ein:

$$p = r\sqrt{1 - \mu^2} \tag{8.4}$$

Man darf r, p und μ nicht mit Koordinaten verwechseln: Wenn man diese Größen kennt, kann man damit noch nicht den vollständigen Weg der Strahlung beschreiben. Erstens weiß man überhaupt nichts über die Lage und zweitens kann die Richtung in 3 Dimensionen nicht mit nur 2 unabhängigen Koordinaten beschrieben werden.

Opazität

Die Opazität ist ein Maß für die Durchsichtigkeit, sie gibt also an, wie viele Photonen durch ein Material durchgehen, ohne extinktiert zu werden. Sie ist von der Dichte und der Temperatur des Materials abhängig.



In dieser Grafik ist die Opazität in Bezug zur Dichte und zur Temperatur aufgetragen.

Man erkennt, dass die Kurve bei hohen Temperaturen sehr flach verläuft. Das liegt daran, dass es bei diesen Temperaturen nur freie Elektronen und daher keine Extinktion gibt. Nur die Thompsonstreuung beeinträchtigt die Sicht ein bisschen.

Bei geringeren Temperaturen erkennt man, dass die Opazität mit zunehmender Dichte zunimmt. Das liegt daran, dass bei einer hohen Dichte die Atome keine Elektronen halten können und somit auch bei einer sehr hohen Dichte keine Extinktion möglich ist.

Am geringsten ist die Opazität im sogenannten Opazitätsloch: Dort ist es zu kalt, dass die Atome ionisieren (es kommt also nur sehr selten vor, dass einem Atom Elektronen fehlen) aber zu heiß zum Bilden von Molekülen (Es kommt also nicht vor, dass sich mehrere Atome ein Elektron teilen). Dadurch ist die Anzahl der Elektronen pro Atom besonders hoch und es werden viele Photonen extinktiert.

Strahlungstransportgleichung

Die Strahlungstransportgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen der spezifischen Intensität (I_ν), der Quellfunktion (S_ν) und der Opazität (κ_ν) einer Charakteristik dar. Dafür werden auch wieder die Größen zur Beschreibung der Charakteristiken benötigt

$$\mu\frac{\delta I_\nu}{\delta r} + \frac{1-\mu^2}{r}\frac{\delta I_\nu}{\delta\mu} = \kappa_\nu(S_\nu - I_\nu) \tag{8.5}$$

Diese Formel hängt stark von der Frequenz der Strahlung ab, weil Intensität, Quellfunktion und Opazität von der Frequenz abhängen. Da die Frequenz durch den Dopplereffekt verschoben wird, hängt die Formel auch von der Geschwindigkeit der

Strahlung ab. Zusätzlich ist die Formel aufgrund der Magnetfelder des Sterns und relativistischer Effekte vom Winkel abhängig.

Um die Abhängigkeit von der Frequenz (und die damit verbundene Geschwindigkeitsabhängigkeit) zu vermeiden, verwendet man das sogenannte Rosseland-Mittel (κ_r). Das bedeutet, man integriert Strahlungsintensität, Quellfunktion und Opazität über alle Frequenzen und rechnet daraus die durchschnittliche Strahlungsintensität, die durchschnittliche Quellfunktion bzw. die durchschnittliche Opazität pro Frequenzintervall aus. Die Formel für das Rosseland-Mittel lautet:

$$\kappa_R = \frac{\int_0^\infty \frac{\delta B_\nu(T)}{\delta T} \delta\nu}{\int_0^\infty \frac{1}{\kappa_\nu} \frac{\delta B_\nu(T)}{\delta T} \delta\nu} \tag{8.6}$$

Konvektion

Bei kühleren Sternen sind die Teilchen weniger beweglich und daher dichter beisammen. Die Strahlung wird dadurch häufiger absorbiert oder gestreut und ist viel langsamer unterwegs.

In diesem Fall spielt die Konvektion eine Rolle: Die Strahlung bleibt lange im selben Teil des Sterns und führt dazu, dass dieser Teil des Sterns wärmer wird, die Teilchen sich also schneller bewegen. Durch diese zusätzliche Bewegung benötigen die Teilchen mehr Platz und sind weniger dicht als die darüberliegenden Schichten. Dadurch sind sie auch leichter als diese Schichten und werden aufgrund der Gravitation von ihnen verdrängt. Weiter vom Stern entfernt existiert jedoch weniger Strahlung und die Strahlung innerhalb dieses Teils geht schneller an die Umgebung verloren als neue Strahlung nachkommt. Die Teilchen werden wieder langsamer, dichter und schwerer und sinken nach unten.

Man erkennt, dass dieser Vorgang von Druck- (die schwereren Teilchen, die durch die Gravitation nach unten drücken) und Temperaturschwankungen (die zunehmende und entweichende Strahlung) geprägt ist. Mit zunehmenden Druck der darüberliegenden Teilchen und mit zunehmender Temperatur steigen die Teilchen auf und mit abnehmender Temperatur und abnehmendem Druck der darunterliegenden Teilchen sinken die Teilchen hinunter.

Bei einem nur minimalen Temperaturunterschied zwischen den Schichten, findet keine Konvektion statt, weil die Verdrängung der weiter unten liegenden Schichten aus dem Potentialtopf und die dafür notwendige Reibung mehr Energie kostet, als der Fall der Teilchen in den Potentialtopf bringt. Der adiabatische Temperaturgradient gibt an, wie hoch der Temperaturunterschied pro Meter (Temperaturgradient) sein müsste, damit die Konvektion beginnt.

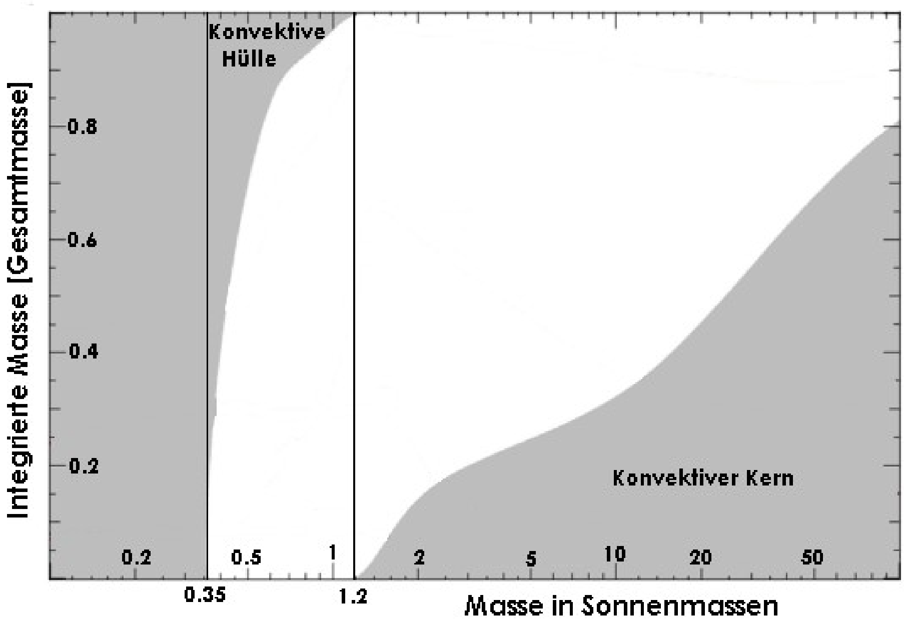
Die Größe dieses Gradienten hängt von der Temperatur und dem Druck im Stern ab:

$$\nabla_{ad} = \frac{\delta lnT}{\delta lnP} \tag{8.7}$$

Wenn der Temperaturgradient nicht größer als der adiabatische Temperaturgradient wird (weil die Strahlung die Teilchen wieder verlassen hat, bevor sich ausreichend Wärme angesammelt hat), findet keine Konvektion statt und die Photonen werden nur durch Strahlung weitergegeben. In diesem Fall treffen die Photonen auf mehr Teilchen und es kommt besonders oft zur Ionisation.

Wenn der Temperaturgradient größer als der adiabatische Gradient wird, steigen die Teilchen, die Photonen absorbiert haben, auf und geben diese Energie erst weiter oben in Form von Linienstrahlung wieder ab. Dadurch, dass die Energie innerhalb der Atome mehr Weg zurücklegt, ist die Wahrscheinlichkeit einer Ionisation geringer.

Wo der Temperaturgradient größer als der adiabatische Gradient ist, hängt von der Masse ab: Sterne mit weniger als $0{,}35 M_\odot$ sind überall konvektiv. Sterne mit mehr als $0{,}35 M_\odot$ aber weniger als $1{,}2 M_\odot$ so wie unsere Sonne, sind in der Mitte konvektiv und am Rand radiativ. Bei Sternen mit mehr als $1{,}2 M_\odot$ ist es genau andersrum: Hier ist der Rand konvektiv und die Mitte radiativ.



In dieser Grafik ist der Ort der Konvektionszonen (krau) in Abhängigkeit von der Masse aufgetragen. Auf der y-Achse ist nicht der Radius sondern die integrierte Masse aufgetragen, die neben dem Radius auch von der Dichte abhängt.

Wenn der Temperaturgradient ganz besonders groß ist, drückt die darüberliegende Schicht so stark auf die darunterliegende Schicht, dass sogar Teilchen aus dem Atomkern herausgelöst werden. Das ermöglicht Kernfusion.

Es gibt im Stern oft nur wenige Gebiete, an denen der Temperaturgradient hoch genug ist, damit Kernfusion stattfinden kann. Diese Gebiete nennt man „Brennzonen“. Solche Brennzonen muss es in jedem Stern geben, andernfalls gäbe es keine Kernfusion und es würde keine Kraft nach außen wirken, sodass der Stern so lang in sich zusammenfällt, bis es weder Brennzonen gibt. Da Brennzonen besonders stark konvektive Zonen sind, muss es in einem Stern auch immer konvektive Zonen geben.

Damit die fusionierbaren Stoffe in die Brennzonen gelangen, ist entweder konvektion oder ein „Dredge-up-Prozess“ notwendig. Dredge-up-Prozess bedeutet, dass die Stoffe zu träge sind, um mit der Rotation des Sterns mitzukommen, und dadurch in die Brennzonen befördert werden.