Planeten

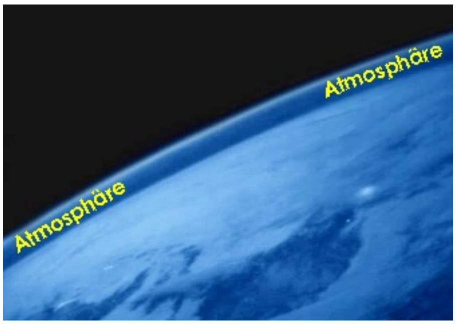
Gesteinsplaneten

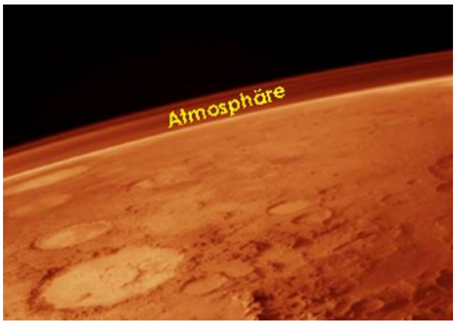
Grundlagen aus dem ersten Semester:
03-Unser Sonnensystem (Seite 14 - 17)

Den Aufbau von Gesteinsplaneten konnten wir besonders gut untersuchen, weil die Atmosphäre im Gegensatz zu Gasplaneten so schmal und dünn ist, dass wir mit unbemannten Raumsonden bereits auf allen Gesteinsplaneten unseres Sonnensystems landen konnten. Außerdem sind uns diese viel näher als die Gasplaneten und die Atmosphäre ist durchsichtiger, so dass wir sie besser beobachten können.

1 Atmosphäre

In der Aufnahme der Erdatmosphäre vom Space-Shuttle (links) und der Aufnahme der Marsatmosphäre von Viking (rechts) ist erkennbar, dass die Atmosphäre eines Gesteinsplaneten, falls vorhanden, nur sehr schmal ist.



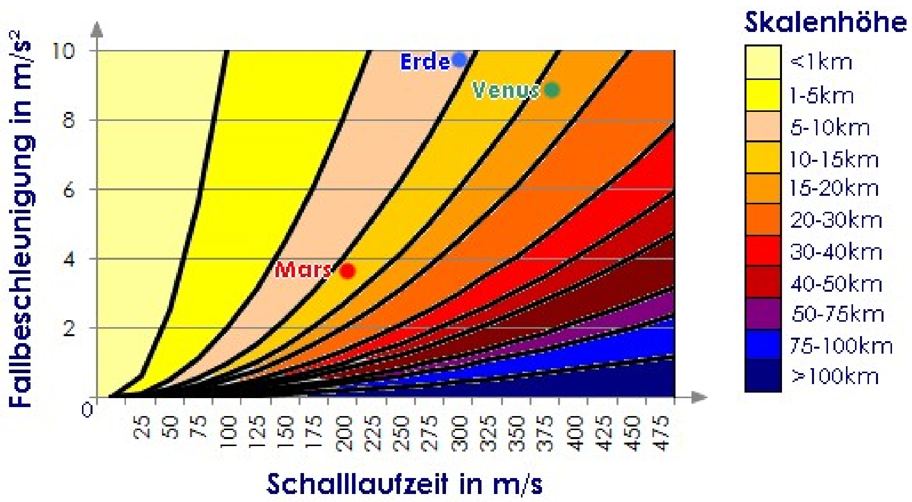


Wie schmal sie genau ist, lässt sich nicht angeben, weil die Atmosphäre eines Gesteinsplaneten keinen klar definierbaren Rand hat, sondern sich nach außen hin verdünnt, bis sie ins Vakuum übergeht. Um dennoch eine Höhe angeben zu können, definiert man die Skalenhöhe. Das ist die Höhe, bei der die Dichte $\frac{\rho_0}{e}$ ist, wobei ρ_0 die Dichte der Atmosphäre an der Oberfläche ist. Wie hoch die Skalenhöhe ist, kann man mit der Formel

$$H_p = \frac{c_s^2}{g} \tag{1.1}$$

ausrechnen. Da die Atmosphäre sehr dünn im Vergleich zum Planetenradius ist, kann man für g konstant die Fallbeschleunigung an der Oberfläche einsetzen.

Die Skalenhöhe ist umso kleiner, je größer die Fallbeschleunigung ist, weil die Atmosphäre durch eine höhere Schwerkraft stärker zusammengedrückt wird. Mit der Schallaufzeit nimmt die Skalenhöhe zu, weil die Atmosphäre die aufgrund der höheren Temperatur nach oben verdrängt wird, schneller ausweichen kann und damit weiter weg kommt.



Bei der Venus ist die Schalllaufzeit aufgrund der hohen Temperatur am größten. Deshalb ist die Venus mit 15,6km der Gesteinsplanet, mit der größten Skalenhöhe in unserem Sonnensystem.

Die Schalllaufzeit am Mars ist nur halb so groß wie jene auf der Venus. Durch die geringe Größe ist jedoch auch die Fallbeschleunigung des Mars sehr gering, sodass die Skalenhöhe des Mars mit 11km nicht viel kleiner als jene auf der Venus ist.

Die Erde ist in unserem Sonnensystem der Gesteinsplanet mit der höchsten Fallbeschleunigung. Deshalb ist auch die Skalenhöhe der Erde nur 9,17km hoch und damit ungefähr so weit wie der Weg von der Sternwarte nach Erdberg.

Der Merkur hat überhaupt keine Atmosphäre und dadurch auch keine Skalenhöhe.

Entstehung

Ursprünglich entstehen alle Planeten in der protoplanetaren Scheibe. Die Atmosphäre entsteht durch die Anziehung der Gase aus der protoplanetaren Scheibe. Zunächst haben auch die Gesteinsplaneten viel Atmosphärenmasse, beispielsweise bestand die Erde am Beginn ihrer Entstehung zu 1% aus Atmosphäre. Heute macht die Erdatmosphäre weniger als ein Millionstel der Erdmasse aus.

Die Gesteinsplaneten können jedoch kaum Atmosphäre halten, weil die Sonne nah genug ist, um mit ihren Sonnenwinden die Atmosphäre aus dem Hillradius und damit aus dem gravitativen Einflussbereich zu wehen. Man spricht dabei von akkretierter

Masse.

Die Gesamtmasse der Atmosphäre zur Zeit t entspricht der ursprünglichen Masse M_0 weniger der bis zu diesem Zeitpunkt akkretierten Masse $M_{akk}(t)$

$$M_{ges}(t) = M_0 - M_{akk}(t) \tag{1.2}$$

Die gravitative Energie nimmt mit der akkretierten Materie ebenfalls ab. Die zeitliche Abnahme wird mit der Formel

$$\frac{dE_{grav}(t)}{dt} = -GM(t)\frac{dM_{akk}(t)}{dt}\frac{r_0 - r(t)}{r_0 r(t)} \tag{1.3}$$

beschrieben. Auch Temperatur und Dichte nehmen ab.

Barometrische Höhenformel

Die Dichte und der Druck der Atmosphäre variiert mit der barometrische Höhenformel. Um diese herzuleiten, verwendet man die Formel für das hydrostatische Gleichgewicht, die schon im Skriptum über Sterne (Formel 2.3.) hergeleitet wurde

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \tag{1.4}$$

Diese Formel lässt sich vereinfachen, indem man die Formel für die Fallbeschleunigung einsetzt.

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho \tag{1.5}$$

Um die Abhängigkeit der Dichte vom Druck zu erhalten, kann man die ideale Gasgleichung einsetzen (Die Atmosphären von Gesteinsplaneten bestehen aus näherungsweise idealen Gasen).

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{gP}{c_s^2} \tag{1.6}$$

Um die Differentialgleichung zu lösen, multipliziert man die Formel mit dr und dividiert sie durch P

$$\frac{dP}{P} = -\frac{g}{c_s^2}dr \tag{1.7}$$

Da wir die Formel nur für die Atmosphäre anwenden wollen, integrieren wir den Radius nur zwischen r_O (den Radius bis zur Oberfläche des Planeten) und $r_O + h$. Den Druck integrieren wir folglich nur zwischen P_O (den Druck bei der Oberfläche) und P (den Druck an der Stelle $r_O + h$).

$$ln(P) - ln(P_O) = -\frac{g}{c_s^2}(r_O + h - r_O) \tag{1.8}$$

Die Schalllaufzeit wird dabei näherungsweise als koonstant angenommen. Diese Näherung ist aufgrund der Temperaturschwankungen durch den Treibhauseffekt sehr ungenau, aber wegen der vielen komplizierten Luftströmungen nicht vermeidbar.

Umformen der Gleichung nach P ergibt

$$P = P_O e^{-\frac{gh}{c_s^2}} \tag{1.9}$$

Durch Einsetzen des Kehrwerts der Formel für die Skalenhöhe erhält man

$$P = P_O e^{-\frac{h}{H_p}} \tag{1.10}$$

Der Druck nimmt also in Richtung Boden exponentiell zu.

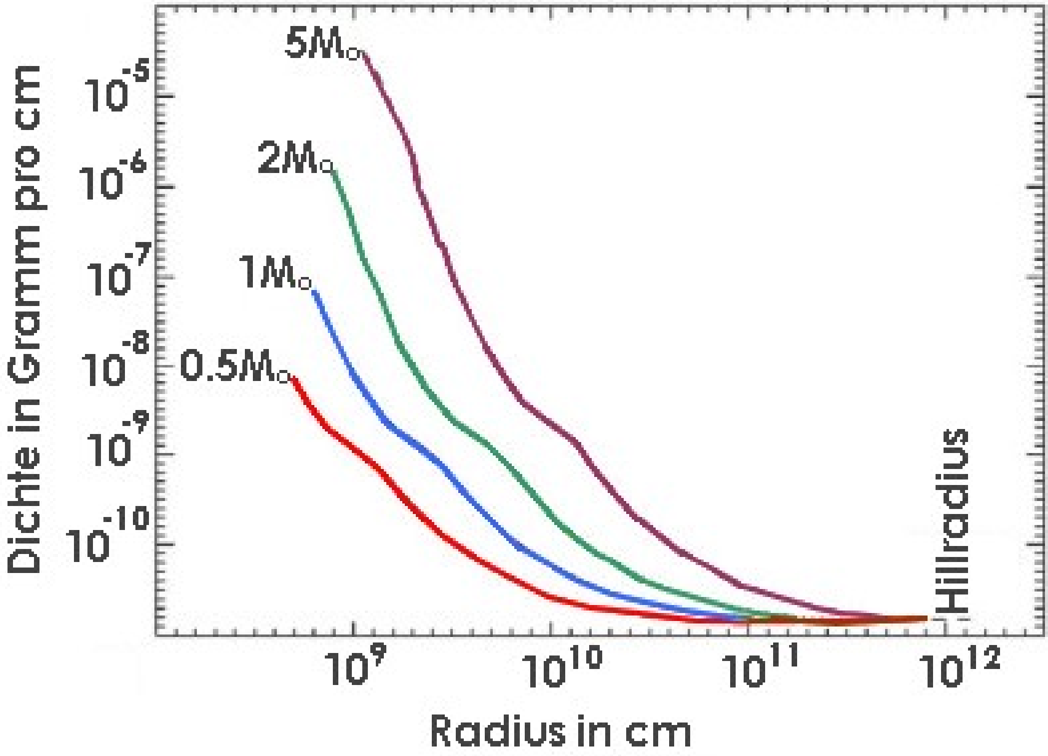
Wenn man für den Druck P und P_O wieder die ideale Gasgleichung einsetzt, erhält man eine Formel für die Dichteverteilung

$$\rho c_s^2 = \rho_O c_s^2 e^{-\frac{h}{H_p}} \tag{1.11}$$

Durch Division beider Seiten durch c_s erhält man für die Dichte die gleiche Formel wie für den Druck

$$\rho = \rho_O e^{-\frac{h}{H_p}} \tag{1.12}$$

Die Atmosphäre wird also aufgrund des Drucks der darüberliegenden Atmosphäre mit abnehmenden Radius exponentiell dichter.



In dieser Graphik ist die Atmosphärendichte im Verhältnis zum Radius für einen Planeten, der so wie die Erde einen Stern mit 1 Sonnenmasse in einer Entfernung von 1AU umkreist, dargestellt. Rechts ist der Hillradius aufgetragen, weil ab diesem Radius kein einziges Teilchen der Atmosphäre gravitativ an den Planeten gebunden sein kann.

2 Innerer Aufbau

Unter der festen Oberfläche (die flüssigen Schichten wie die Meere auf der Erde sind falls vorhanden nur vernachlässigbar dünn) befinden sich je nach Druck und Temperatur sowohl feste als auch flüssige Teile.

Druck

Da sich Festkörper und Flüssigkeiten im Gegensatz zu Gasen kaum zusammendrücken lassen, kann man die Dichte im inneren der Gesteinsplaneten näherungsweise als konstant annehmen. Auch diese Näherung ist nur grob: Gesteinsplaneten haben eine Dichtevariation von ungefähr 2, das heißt, dass die dichteste Stelle ungefähr doppelt so dicht wie die dünnste Stelle ist.

Für die Berechnung der Druckfunktion benötigt man die Formel für das hydrostatische Gleichgewicht und die Formel für die integrierte Masse, die schon im Sternskriptum (Formel 2.3. und 2.7.) vorgekommen ist.

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM\rho}{r^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho \tag{2.2}$$

Wenn man die Formel 2.2. nach dem Radius integriert, erhält man

$$M = \frac{4\pi r^3}{3}\rho + C \tag{2.3}$$

Die integrierte Masse beim Radius 0 ist 0. Durch Einsetzen dieser Anfangsbedingung erhält man C=0 und damit

$$M = \frac{4\pi r^3}{3}\rho \tag{2.4}$$

was nichts anderes bedeutet, als dass die Masse das Volumen mal der Dichte ist. Diese Formel setzen wir in 2.1. ein und erhalten dadurch

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G4\pi\rho^2 r}{3} \tag{2.5}$$

Durch Integration dieser Formel nach dem Radius erhält man

$$P = -\frac{G2\pi\rho^2 r^2}{3} + C \tag{2.6}$$

Da auf der Oberfläche (Radius des Planeten R) kein Druck mehr wirkt, gilt als Anfangsbedingung P(R)=0. Durch Einsetzen dieser Anfangsbedingung erhält man

$$0 = -\frac{G2\pi\rho^2 R^2}{3} + C \tag{2.7}$$

und durch Umformen nach der Konstante

$$C = \frac{G2\pi\rho^2 R^2}{3} \tag{2.8}$$

Durch Einsetzen der Konstante in 2.6. erhält man

$$P = -\frac{G2\pi\rho^2 r^2}{3} + \frac{G2\pi\rho R^2}{3} \tag{2.9}$$

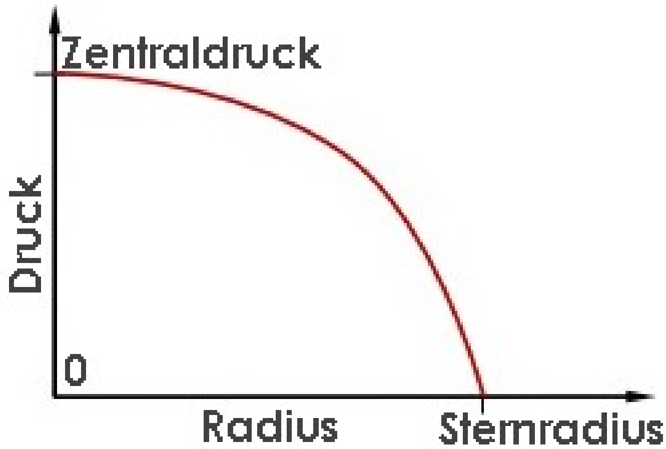
Diese Formel lässt sich durch herausheben von $\frac{G2\pi\rho r^2}{3}$ vereinfachen

$$P = -\frac{G2\pi\rho^2}{3}(R^2 - r^2) \tag{2.10}$$

Man erkennt, dass der Druck im Zentrum (bei r=0)

$$P_C = -\frac{G2\pi\rho^2 R^2}{3} \tag{2.11}$$

beträgt und nach außen proportional zu $1 - (\frac{r}{R})^2$ abfällt



In dieser Graphik ist der Druck im Vergleich zum Radius aufgetragen. Auch hier erkennt man den quadratischen Abfall.

Wenn man den Druck nicht im Verhältnis zur Dichte sondern im Verhältnis zur Masse auftragen möchte, muss man 2.4. nach der Dichte umformen

$$\rho = \frac{3M}{4\pi r^2} \tag{2.12}$$

Da die Dichte im gesamten Planeten gleich ist, kann man einen beliebigen Radius einsetzen. Damit sich im Ergebnis das R kürzt, wählt man r=R

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^2} \tag{2.13}$$

Durch Einsetzen des Ergebnis in 2.10. erhält man

$$P = -\frac{G2\pi}{3}\frac{9M^2}{16\pi^2 R^4}(R^2 - r^2) \tag{2.14}$$

Dieses Ergebnis lässt sich vereinfachen

$$P = -\frac{3GM^2}{8\pi R^2}(1 - (\frac{r}{R})^2) \tag{2.15}$$