Beweistechniken

Alle Angaben ohne Gewähr

Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern

Wie im Skriptum Unimathe für Anfänger bereits klar wurde, ist das Beweisen essentiell für die höhere Mathematik. Die meisten Beweise funktionieren nicht nach Schema F sondern man muss einfach gute Ideen haben. Dazu braucht es Übung und Erfahrung. Dennoch gibt es einige grundlegende Beweistechniken, die in diesem Skriptum vorgestellt werden.

1 Nichtmathematische Beweise

Dieses Kapitel umfasst Beweisideen, die zwar teilweise eine Idee geben, ob und warum ein Satz stimmt, einen mathematischen Beweis jedoch nicht ersetzen können. Das Kapitel ist auch als Warnung gedacht, welche scheinbar richtigen Beweismethoden, man nicht verwenden darf.

1.1 Beispiele einsetzen

Man kann keinen Satz, der für unendlich viele Zahlen gilt, mit Hilfe von endlich vielen Beispielen beweisen, auch dann nicht, wenn sich die Beispiele scheinbar auseinander entwickeln. Wenn man zum Beispiel in die Ungleichung $0,0001x^4 < x^2$ die Zahlen 1, 2, 3 und 4 einsetzt, würde man vermuten, dass die Ungleichung stimmt, weil sich die Funktionen für größere Zahlen scheinbar immer weiter voneinander entfernen. Wenn man die Zahlen jedoch groß genug wählt, steigt die x^4-Funktion stärker an und die Entwicklung dreht sich um.

Ein Beispiel in dem sich die Zahlen tatsächlich unendlich weit auseinander bewegen, ist die Gleichung $x^4 > 0,0001x^2$. Dennoch geht die Methode auch bei dieser Ungleichung schief, wenn man nicht extrem kleine Werte ausprobiert (für diese gilt die Ungleichung nicht).

Selbst wenn man ein Computerprogramm Beispiele ausprobieren lässt, kann dieser in endlicher Zeit nicht unendlich viele Werte durchprobieren. Das Einsetzen von Beispielen kann daher bestenfalls der Intuition dienen.

1.2 Graphischer Beweis

Eine sehr ähnlicher Beweismethode mit den gleichen Problemen, ist der graphische Beweis: Auch hier kann man die Funktion nur in einem eingeschränkten Intervall zeichnen und würde daher bei der Ungleichung $0,0001x^4 < x^2$ wenn sie nur zwischen 0 und 4 gezeichnet ist, glauben dass sie stimmt.

Bei der Gleichung $x^4 > 0,0001x^2$ würde der Beweis schon daran scheitern, dass der Stift zu dick ist. Abgesehen davon erzeugt man die Graphik mit Hilfe einer Wertetabelle, in der nur endlich viele Werte eingetragen sind.

Auch ein Computer kann so eine Graphik nur zeichnen, indem er endlich viele Punkte berechnet. Der Graphische Beweis ist daher ebenfalls nicht aussagekräftig.

1.3 Intuitiver Beweis

Manche Sätze sind so intuitiv, dass man gar keinen Beweis für nötig hält. Dennoch sollte man immer versuchen einen Beweis durchzuführen, damit man nicht auf weniger intuitive Teile vergisst.

Beispielsweise wird intuitiv leicht klar, dass die Quadratwurzel aus 4 gleich 2 ist, wenn man 4 Punkte wie am Würfel als Quadrat aufzeichnet und erkennt, dass die Seitenlänge gleich 2 ist. Allerdings übersieht man bei dieser intuitiven Umformung, dass -2 ebenfalls eine Lösung ist.

2 Was für alle mathematischen Beweistechniken relevant ist

Einige Aspekte muss man bei jeder Beweistechnik beachten. Hier sind die wichtigsten aufgelistet

2.1 Arbeite nur mit mathematischen Definitionen

Die mathematischen Definitionen sind so formuliert, dass man in diese sinnvoll etwas einsetzen und umformen kann. Wenn man beispielsweise beweisen möchte, dass die Ableitung von x gleich 1 ist, kann man das mit der intuitiven Vorstellung einer Steigung nicht erreichen.

Man könnte die Funktion zwar aufzeichnen und deshalb vermuten, dass die Aussage stimmt, mathematisch bewiesen ist die Aussage dadurch jedoch nicht: Beispielsweise würde man durch einen graphischen Beweis auch glauben, die Steigung der Funktion $1,0001x$ wäre 1, obwohl das nur näherungsweise stimmt und bei der Funktion $x + 0,00001x^2$ stimmt es für große x nicht einmal näherungsweise.

Verwendet man hingegen die mathematische Definition

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2.1}$$

muss man nur für f(x) x und für f(x+h) x+h einsetzen

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} \tag{2.2}$$

und die Formel kürzt sich fast automatisch zu 1.

2.2 Beachte immer alle möglichen Fälle

Man muss bei jedem Umformungsschritt aufpassen, dass man diese Umformung in allen Fällen durchführen kann. Ist das nicht der Fall muss man eine entsprechende Fallunterscheidung durchführen und in den Fällen, bei denen die Umformung nicht erlaubt ist, eine andere Umformung wählen.

Betrachtet man beispielsweise die Formel $x^2 + x = 0$ bietet es sich an durch x zu dividieren. Das darf man aber nur machen, wenn x nicht selber 0 ist. Für $x \neq 0$ kommt man auf das Ergebnis x=-1.

Den Fall das x selber 0 ist, muss man gesondert betrachten. Durch Einsetzen dieses Werts in die Formel erkennt man, dass x=0 tatsächlich eine Lösung ist. Hätte man die Fallunterscheidung nicht gemacht, wäre einem diese Lösung entgangen.

2.3 Achte darauf, dass du alle Teile des Satzes bewiesen hast

In vielen Sätzen stecken mehrere Aussagen drinnen, teilweise stecken sogar mehrere Aussagen in nur einem Symbol. Ein Beispiel dafür ist das Symbol $\exists!$, bei dem man nicht nur überprüfen muss, dass ein Element existiert, dass die Bedingungen erfüllt, sondern auch, das die Bedingungen von keinem anderen Element erfüllt wird.

Ein anderes Beispiel ist der Äquivalenzpfeil: Um zu zeigen, dass $A \Leftrightarrow B$ gilt, muss man sowohl $A \Rightarrow B$ als auch $A \Leftarrow B$ beweisen, denn aus $A \Rightarrow B$, folgt zwar dass aus A B folgen kann, nicht aber dass aus A B folgen muss.

Betrachten wir beispielsweise die Aussage $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$. Aus dieser Aussage folgt natürlich, dass aus $x^2 = 4$ auch x=2 folgen kann. (Wenn aus $x^2 = 4$ $x \neq 2$ folgen würde, wäre die Aussage widerlegt). Die Aussage besagt jedoch nicht, dass aus $x^2 = 4$ $x = 2$ folgen muss (Es könnte daraus auch $x = -2$ folgen)

2.4 Verwende abgesehen von den Vektorraumaxiomen nur Umformungen, die du bereits bewiesen hast

Kein Schritt (auch wenn er noch so intuitiv erscheint) darf vorausgesetzt werden (siehe dazu auch intuitiver Beweis). Die einzige Ausnahme sind die Vektorraumaxiome: Diese musste man an den Anfang setzen, damit man überhaupt etwas beweisen kann.

3 Mathematische Beweistechniken

Nachdem wir lang und breit durchgegangen sind, was alles nicht geht, kommen wir endlich zu den tatsächlich mathematisch funktionierenden Beweistechniken

3.1 Beispiele einsetzen

Diese Beweistechnik kann man nur verwenden, wenn die Aussage die man zeigen will ist, das etwas existiert. Beispielsweise wenn man beweisen soll, dass die Wurzel aus 4 rational ist, bedeutet das mathematisch, dass ein Bruch $\frac{p}{q}$ existiert, für den gilt $(\frac{p}{q})^2 = 4$. Sofern einem ein Beispiel einfällt (zum Beispiel $\frac{2}{1}$), kann man dieses in die Definition einsetzen ($(\frac{2}{1})^2 = 4$) und erkennt, dass der Satz stimmt.

3.2 Direkter Beweis

Den direkten Beweis benutzt man, wenn man nach Einsetzen der mathematischen Definition einen Satz der Form: Für alle ... gilt ... erhält

Möchte man beispielsweise beweisen, dass alle Polynomfunktionen differenzierbar sind, erhält man nach Einsetzen der Definition den Satz: Für alle Polynomfunktionen gilt: Es existiert eine Ableitungsfunktion. Der erste Schritt ist, dass man die allgemeinste Form in die Definition einsetzt. In unserem Beispiel ist es die allgemeinste Polynomfunktion

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... = a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \tag{3.1}$$

In dieser Darstellung sind alle Polynomfunktionen enthalten, beispielsweise ist die Funktion x^2 der Fall, das $a_2 = 1$ und alle anderen $a_n = 0$ sind. Die Aussage, dass eine Ableitungsfunktion existiert, zeigt man in dem Fall am besten nicht durch Einsetzen eines Beispiels (obwohl auch in dem Satz ein existiert steht), weil ableiten einfacher als integrieren ist.

Wenn man die Summen- und Produktregel bereits bewiesen hat (diese kann man auch direkt durch Einsetzen in die Definition der Ableitung und Umformen beweisen), kann man die Funktion ableiten und kommt dadurch automatisch auf eine existierende Ableitungsfunktion:

$$\sum_{n=0}^{\infty} na_nx^{n-1} = 0a_0x^{-1} + 1a_1x^0 + 2a_2x^1 + ... = a_1 + 2a_2x + ... \tag{3.2}$$

Zusammengefasst funktioniert ein direkter Beweis, indem man die allgemeinste Form in die Definition einsetzt und so lang umformt, bis dort die Aussage steht, die man zeigen möchte (in unserem Beispiel die Ableitungsfunktion, die existieren soll).

3.3 Indirekter Beweis

Den indirekten Beweis kann man verwenden, wenn man eine Aussage die stimmt aufteilt. Beispielsweise kann man die Aussage „Die Wurzel aus 2 existiert" aufteilen in die Aussagen „Die Wurzel aus 2 ist rational" und „Die Wurzel aus 2 ist irrational". Wenn man beweisen möchte, dass die Wurzel aus 2 irrational ist, kann man die Aussage, dass die Wurzel aus 2 rational ist widerlegen und dadurch erkennen, dass die Wurzel aus 2 irrational ist (denn eine der beiden Aussagen muss stimmen, wenn die Wurzel aus 2 existiert).

Beim Widerspruchsbeweis genügt es nicht immer, die Aussage zu beweisen, die man intuitiv als das Gegenteil auffassen würde: Wenn man beispielsweise die Aussage $\frac{1}{0} \in \mathbb{Q}$ beweisen möchte, könnte man auf die Idee kommen, die Aussage $\frac{1}{0} \in \mathbb{I}$ zu wiederlegen. Das wird einem auch gelingen, denn diese Aussage ist tatsächlich falsch. Den Fehler, den man gemacht hat, ist, dass die Aussage, die man aufgeteilt hat (das $\frac{1}{0}$ existiert), schon falsch ist.

Am einfachsten bildet man das Gegenteil, wenn man das Zeichen das Vorrang hat (Logische Operatoren wie $=$, $\in$ oder $\Rightarrow$ vor Potenz- Punkt- und Strichrechnung) durchstreicht bzw. die Durchstreichung wegnimmt: Beispielsweise wird aus $\frac{1}{0} \in \mathbb{Q}$ $\frac{1}{0} \notin \mathbb{Q}$ (das beinhaltet bereits den Fall, das $\frac{1}{0}$ nicht existiert). Umgekehrt ist das Gegenteil von $\frac{1}{0} \notin \mathbb{Q}$ wieder $\frac{1}{0} \in \mathbb{Q}$ (das beinhaltet den Fall, dass $\frac{1}{0}$ nicht existiert wiederum nicht).

Eine Besonderheit bildet der Folgepfeil: Den muss man umdrehen und von den beiden Aussagen davor und danach das Gegenteil bilden, denn das Gegenteil der Aussage „Aus A folgt B“ ist „Aus A muss nicht B folgen“ und das bedeutet, dass es eine Aussage ungleich B gibt, aus der A folgen kann. Wenn jedoch aus allen Aussagen ungleich B Aussagen ungleich A folgen, stimmt das Gegenteil nicht und der Satz ist bewiesen.

Der Vorteil, wenn man das Gegenteil gebildet hat, ist, dass es leichter ist, einen Satz zu widerlegen, als einen Satz zu beweisen. Um das zu verstehen, wollen wir einen Satz in mehrere Teilsätze (sogenannte notwendige Bedingungen) aufteilen.

Wir betrachten den Satz $x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$ Diesen kann man in die zwei Sätze $x = 2 \Leftarrow x^2 = 4$ und $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ aufteilen.

Wenn man den Satz beweisen möchte, genügt es nicht, einen Satz, zum Beispiel $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ zu beweisen, denn dann könnte immer noch $x = 2 \Leftarrow x^2 = 4$ falsch sein. Wenn man den Satz jedoch widerlegen möchte, genügt es einen Satz, zum Beispiel $x = 2 \Leftarrow x^2 = 4$ zu widerlegen und dann ist es egal, ob die andere Aussage auch falsch ist, der gesamte Satz ist auf jeden Fall falsch.

Noch effektiver ist es, wenn man einen Satz in unendlich viele Teile aufteilen kann, zum Beispiel kann man den Satz $x = A \Leftrightarrow x^2 = A^2$ für alle A $\in \mathbb{R}$ in den Satz für A=1, den Satz für A=2 und so weiter aufteilen. Wenn man feststellt, dass der Satz für A=2 falsch ist, ist es unerheblich ob der Satz für irgendein anderes A stimmt.

3.4 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion verwendet man, wenn man einen Satz zeigen möchte, der für alle natürlichen Zahlen gilt. Sie besteht aus zwei Teilen: Dem Induktionsanfang und dem Induktionsschritt.

Im Induktionsanfang zeigt man durch Einsetzen, dass die Aussage für die niedrigste natürliche Zahl (je nach Definition 0 oder 1) stimmt. Möchte man beispielsweise beweisen, dass $n \leq n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}^*$, setzt man im Induktionsanfang für n=1 ein und erhält die wahre Aussage $1 \leq 1$.

Im Induktionsschritt zeigt man (wieder durch Einsetzen), dass die Aussage sofern sie für n gültig ist, auch für n+1 gültig ist. Wenn man diese Aussage bewiesen hat, weiß man, dass die Aussage für jede beliebige natürliche Zahl gilt, denn man kann von der Zahl 1 (von der wir schon im Induktionsanfang gezeigt haben, dass sie die Aussage erfüllt), beliebig oft den Induktionsschritt ausführen (von dem wir gezeigt haben, dass er die Gültigkeit nicht ändert) und erreichen so jede Zahl.

Für unser Beispiel bedeutet das: Wenn das Beispiel für eine beliebige Zahl n gilt (also $n \leq n^2$), dann soll sie auch für die nachfolgende Zahl n+1 gelten (also $n+1 \leq (n+1)^2$). Insgesamt lässt sich die Aussage, die wir im Induktionsschritt beweisen wollen, also so aufschreiben:

$$n \leq n^2 \Rightarrow n+1 \leq (n+1)^2 \tag{3.3}$$

Der weitere Vorgang des Induktionsbeweises ist immer gleich: Man formt eine Seite der Gleichung auf der rechten Seite des Folgepfeils so um, dass dieselbe Seite auf der linken Seite des Folgepfeils abgetrennt darin enthalten ist. Dann setzt man in diesen Teil die andere Seite der Gleichung ein.

In unserem Beispiel kann man die rechte Seite $(n+1)^2$ so umformen, dass die linke Seite n^2 abgetrennt ist. Man erhält dadurch

$$n \leq n^2 \Rightarrow n+1 \leq n^2 + 2n + 1 \tag{3.4}$$

Für den abgetrennten Teil kann man den Teil auf der anderen Seite des Kleinerzeichens einsetzen und kommt auf eine wahre Aussage

$$n+1 \leq n + 2n + 1 \tag{3.5}$$

Die rechte Seite ist um mindestens 2n größer als die linke Seite. (Mindestens deshalb, weil wir in die Gleichung etwas kleineres eingesetzt haben).

Bei Ungleichungen könnte diese Umformung auch schief gehen, nämlich dann wenn die Seite, die man einsetzt, so viel kleiner ist, dass das Einsetzen der Aussage zu einem Widerspruch führt. (Das ist dann der Fall, wenn sich die Funktionen an irgendeiner Stelle annähern). In dem Fall kann man versuchen, den größeren in den kleineren Teil einzusetzen (Das funktioniert jedoch auch nur, wenn sich die Funktionen an allen Stellen annähern.

Wenn sich die Funktionen manchmal annähern und manchmal entfernen, funktioniert der Induktionsbeweis garnicht und man muss eine andere Beweistechnik verwenden.

3.5 Verallgemeinerte Induktion

Eine verallgemeinerte Form der Induktion kann man für alle Mengen mit konstanten Abständen verwenden. In dem Fall ändert sich der Induktionsschritt: Man setzt statt n+1 n+i ein, wobei i der Abstand zwischen den nacheinander folgenden Elementen ist.

Möchte man beispielsweise die Aussage $-2^n \leq -3^n$ für alle positiven geraden Zahlen beweisen, muss man im Induktionsschritt n+2 einsetzen, weil die nacheinander folgenden geraden Zahlen den Abstand 2 haben.

Wenn sich das Intervall ändert, kann sich auch der Induktionsanfang ändern:

Wenn das Intervall eine Untergrenze besitzt, muss man diese in den Induktionsanfang einsetzen. Wenn man beispielsweise die Aussage $2n \leq n^2$ für alle $n \geq 2$ beweisen möchte, muss man in den Induktionsanfang 2 einsetzen.

Wenn das Intervall eine Obergrenze besitzt, muss man diese in den Induktionsanfang einsetzen und danach den Induktionsschritt rückwärts ausführen. Möchte man beispielsweise die Aussage $-2n \leq n^2$ für alle $n \leq -2$ beweisen, muss man -2 in den Induktionsanfang einsetzen. Im Induktionsschritt muss man n-1 einsetzen um die Aussage für alle -n durch n-2-maliges Ausführen des Induktionsschritts zu beweisen.

Wenn es weder eine Ober- noch eine Untergrenze gibt, muss man in den Induktionsanfang die Stelle einsetzen, bei der die Funktionen am nächsten zueinander sind und den Induktionsschritt in beide Richtungen ausführen. Möchte man beispielsweise die Aussage $n^2 < n^4$ für alle ganzen Zahlen beweisen, muss man im Induktionsschritt n=0 einsetzen. Dadurch entwickeln sich sowohl bei der positiven Induktion mit n+1, als auch bei der negativen Induktion mit n-1 die Funktionen auseinander, sodass man den Induktionsschritt in beide Richtungen durchführen kann.

4 Übungsaufgaben

1. Beweise $3n > (-3)^{-n}$ für alle negativen ungeraden Zahlen kleiner als -1
2. Beweise $(n+1)^2 \neq 0$ für alle natürlichen Zahlen
3. Beweise dass es ein Polynom mit konstanter Steigung gibt

5 Lösungen

Aufgabe 1

Diese Aufgabe muss man mit verallgemeinerter Induktion lösen. In den Induktionsschritt muss man -3 einsetzen, denn die Aussage gilt für negative ungerade Zahlen echt kleiner als -1 (nicht kleiner gleich -1) und die nächstkleinere Zahl ist -3. Einsetzen ergibt

$$-9 > -27 \tag{5.1}$$

Den Induktionsschritt muss man in negativer Richtung durchführen und der Induktionsabstand ist 2. Folglich muss man den Induktionsschritt mit n-2 durchführen

$$3n > (-3)^{-n} \Rightarrow 3(n-2) > (-3)^{-n+2} \tag{5.2}$$

Da sich die Funktionen voneinander entfernen, muss man den kleineren Teil (hier rechts des Ungleichheitszeichens) umformen und in den größeren Teil einsetzen. Die Separation von 3^n erfolgt durch Anwenden der Potenzregel für Addition

$$3n > (-3)^{-n} \Rightarrow 3(n-2) > (-3)^{-n}(-3)^2 = 9((-3)^{-n}) \tag{5.3}$$

Einsetzen von 3n statt 3^{-n} ergibt die Aussage

$$3n > 3^{-n} \Rightarrow 3(n-2) > 27n \tag{5.4}$$

und umformen nach n gibt die, für die verwendeten Werte wahre Aussage $n < -\frac{1}{8}$.

Man könnte jetzt auf die Idee kommen, den Beweis falsch zu deuten und zu glauben, dass die Aussage für alle $n < -\frac{1}{8}$ also auch zum Beispiel für n=-1 gilt. Diese Schlussfolgerung ist falsch, denn der Beweis kam nur dadurch zustande, dass wir angenommen haben, dass die Aussage auch für n+2 gilt (das wäre in dem Fall 1). Für n=1 gilt die Aussage jedoch nicht, sodass sie auch für n=-1 nicht stimmen muss (und wie man durch Einsetzen leicht feststellen kann auch nicht stimmt).

Aufgabe 2

Bei dieser Aufgabe würde man auf den ersten Blick auch glauben, dass ein Induktionsbeweis sinnvoll ist. Dieser kann jedoch nicht funktionieren, weil sich die Gleichungen manchmal annähern und dann wieder voneinander entfernen. Tatsächlich ist ein Widerspruchsbeweis sinnvoll. Das Gegenteil der Formel lautet

$$(n+1)^2 = 0 \tag{5.5}$$

Umformen der Gleichung mittels binomischer Formel und pq-Formel nach n gibt n=-1. Da das keine natürliche Zahl ist, ist das Gegenteil der Aussage falsch und die Aussage damit wahr.

Aufgabe 3

Diese Aussage kann man durch ein Beispiel zeigen: Die konstante Funktion x=1 ist eine Polynomfunktion (für $a_0 = 1$ und alle anderen $a_n = 0$). Durch Einsetzen in die Definition der Ableitung

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0 \tag{5.6}$$

folgt, dass dieses Beispiel konstant ist und damit den Satz beweist.