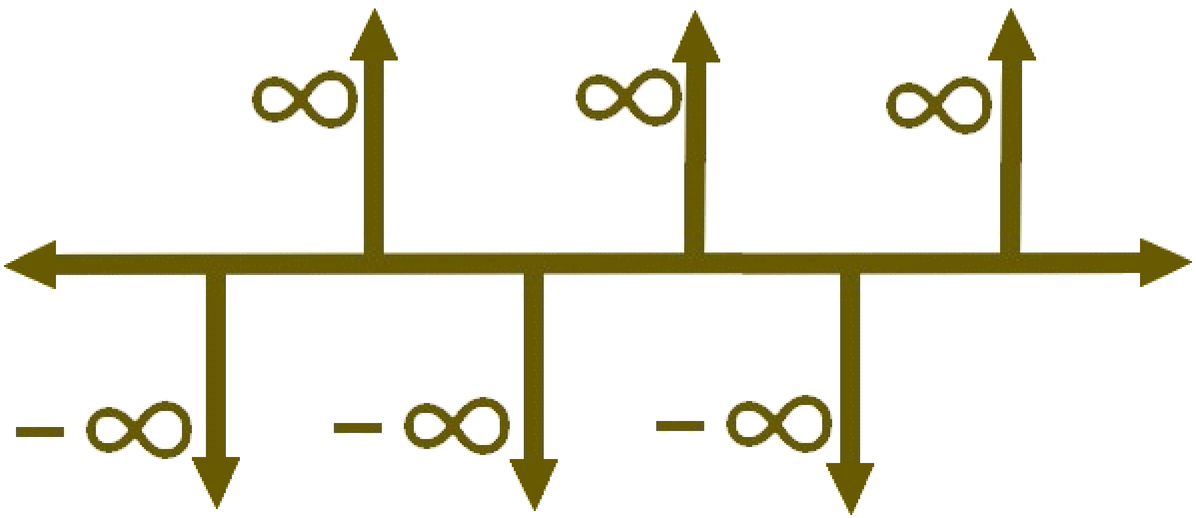
Distributionen



EINLEITUNG

In diesem Skriptum werden zuerst Fragen an den Leser gestellt und erst dann die Antworten gegeben.

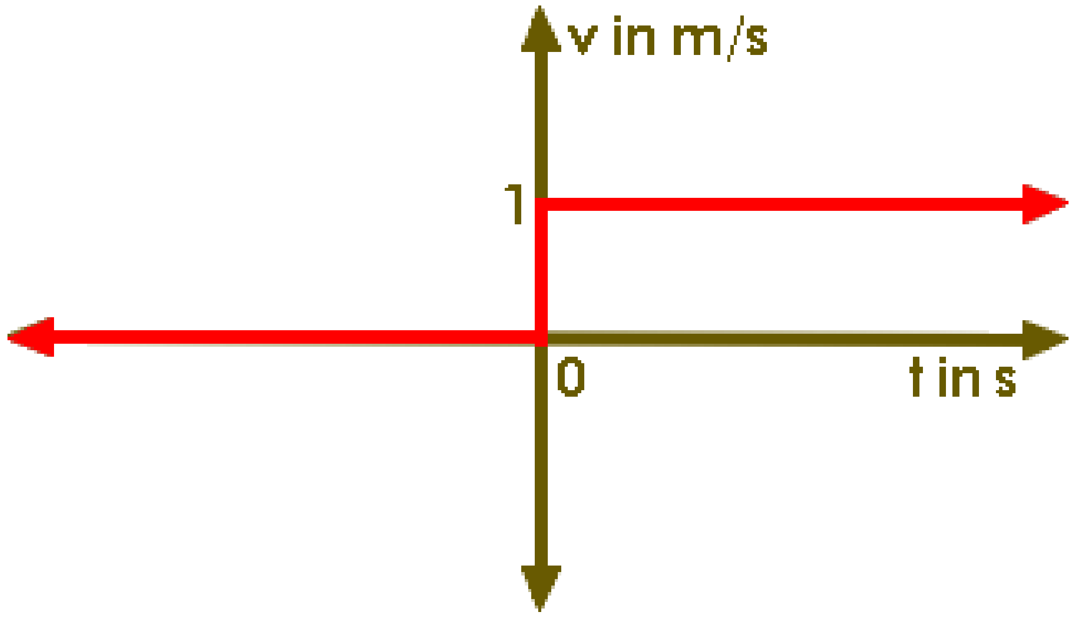
Die Fragen sind nur mit Mathematik-Maturakenntnissen und etwas mathematischer und physikalischer Intuition beantwortbar.

Die Idee hinter diesem Aufbau ist, dass man sich Fakten, die man sich selbst überlegt hat, leichter merkt.

Aufgabe 1

Ein Golfball ruht auf dem Rasen (v=0).

Zum Zeitpunkt 0 wird er so angeschlagen, dass er mit einer konstanten Geschwindigkeit von 1m/s losrollt (Reibung und Luftwiederstand werden vernachlässigt).



Aufgabe 1

A: Wie sieht der Graph für die Beschleunigung des Golfballs aus?

B: Handelt es sich bei diesem Graph um eine Funktion?

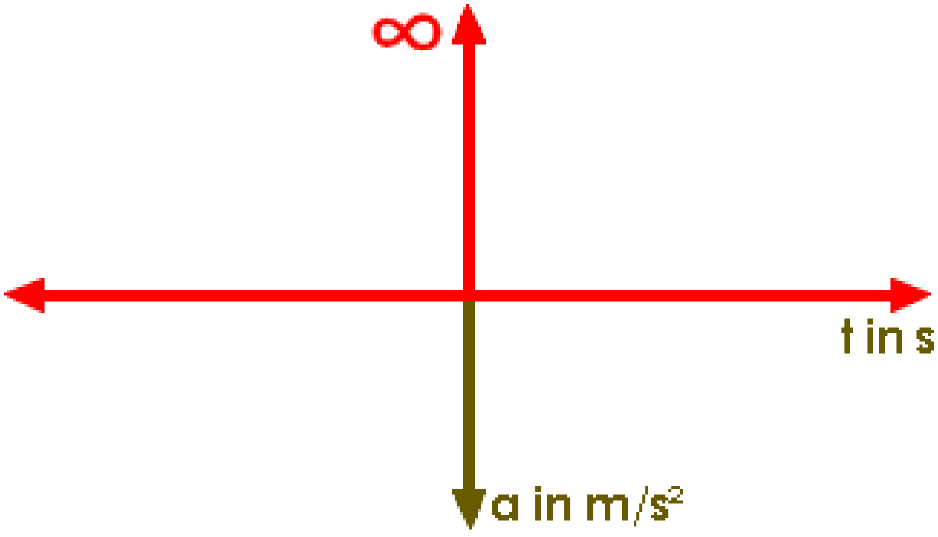
C: Ist dieses Beispiel realistisch?

D: Ist dieses Beispiel physikalisch sinnvoll?

Lösung 1a

Die Beschleunigung ist sowohl in der Zeit, wenn der Ball ruht, als auch in der Zeit, wenn der Ball konstant mit 1m/s rollt 0.

Zum Zeitpunkt des Anschlags ist die Beschleunigung ∞, weil die Geschwindigkeit in 0 Sekunden zunimmt



LÖSUNG 1B

Eine Funktion ist so definiert, dass sie jeder reellen Zahl eine andere reelle Zahl zuordnet.

Diese Eigenschaft ist in diesem Beispiel nicht erfüllt, weil der reellen Zahl 0 der Wert ∞ zugeordnet wird.

Man bezeichnet das so entstandene Objekt als Distribution.

LÖSUNGEN 1C - 1D

Das Beispiel ist nicht realistisch, weil der Golfball nicht in unendlich kurzer Zeit beschleunigt werden kann.

Jeder physikalische Vorgang benötigt eine endliche Zeit, somit gibt es gar keine realistischen Beispiele mit Distributionen.

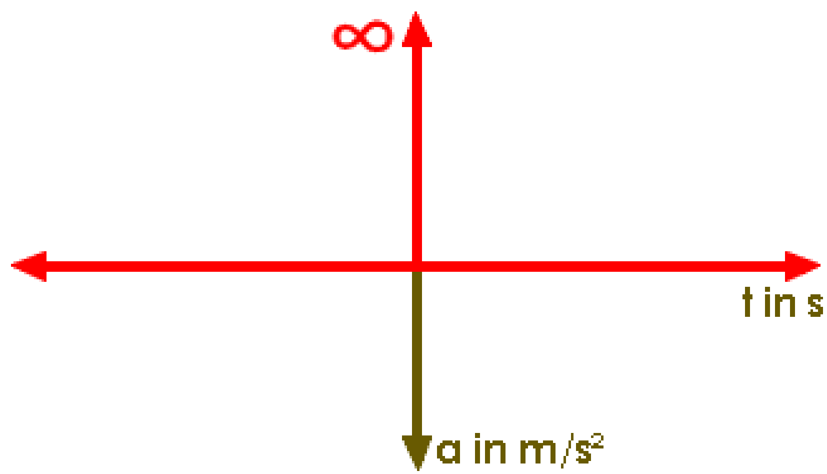
Da der genaue Beschleunigungsvorgang nicht relevant ist, kann man sich viel Arbeit ersparen, wenn man die Funktion als Distribution nähert.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Distribution aus Aufgabe 1A.

A: Kann man das Integral dieser Distribution an jeder Stelle berechnen?

B: Ist es sinnvoll an jeder Stelle ein Integral zu definieren?



LÖSUNG 2A

Mathematisch gesehen ist das Integral die Fläche unter der Kurve. An der Stelle 0 befindet sich jedoch ein Peak, der ∞ hoch und ∞ dünn ist. Folglich ist die Fläche nicht definiert.

Physikalisch wird klar, dass es kein eindeutiges Integral gibt, weil ein Golfball der doppelt so stark angeschlagen wird, dieselbe Beschleunigungsdistribution aber eine andere Geschwindigkeitsfunktion (2km/s statt 1km/s) besitzt.

LÖSUNG 2B

Es ergibt in vielen Fällen Sinn, eine sogenannte „Testfunktion“ zu definieren. Diese gibt das Integral der Funktion an jeder Stelle an, ist aber nur bei den Peaks interessant.

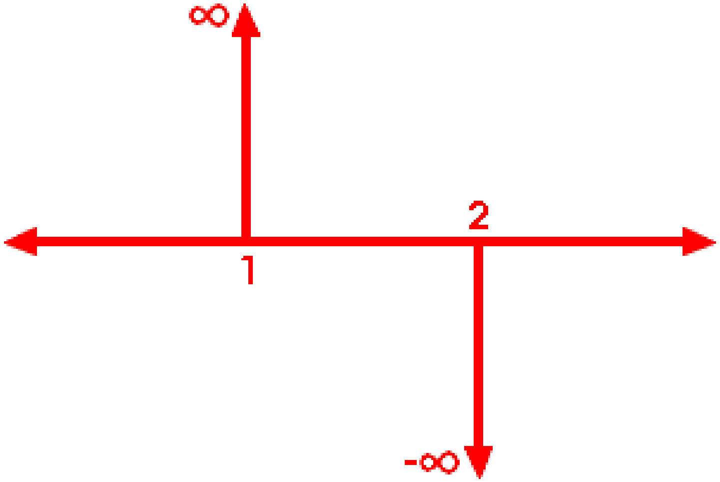
Bei unserem Beispiel hat die Testfunktion an der Stelle 0 den Wert 1, weil dort die Geschwindigkeit des Golfballs um 1km/s zunimmt.

Aufgabe 3

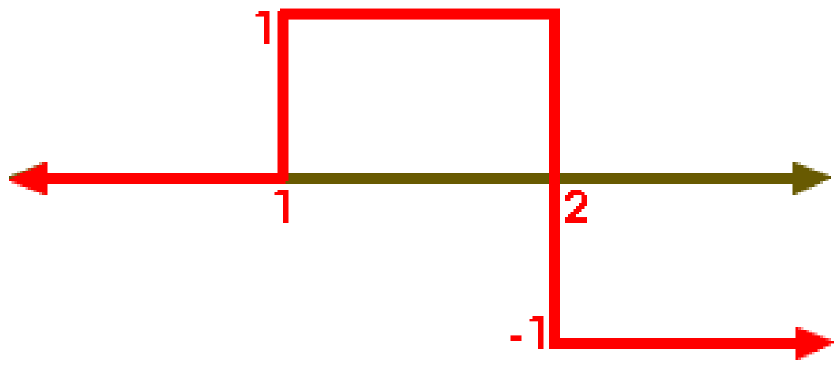
Gegeben ist eine Beschleunigungsdistribution mit zwei Peaks.

An der Stelle 1 hat die Testfunktion den Wert 1, an der Stelle 2 den Wert -2. Die Anfangsgeschwindigkeit des Golfballs ist 0km/s.

Welche Geschwindigkeitsfunktion besitzt der Golfball?



LÖSUNG 3



Bis zum ersten Peak besitzt der Golfball die Anfangsgeschwindigkeit von 0km/h (Er beschleunigt ja nicht).

Beim ersten Peak ist das Integral 1, also muss der Golfball um 1km/s beschleunigen.

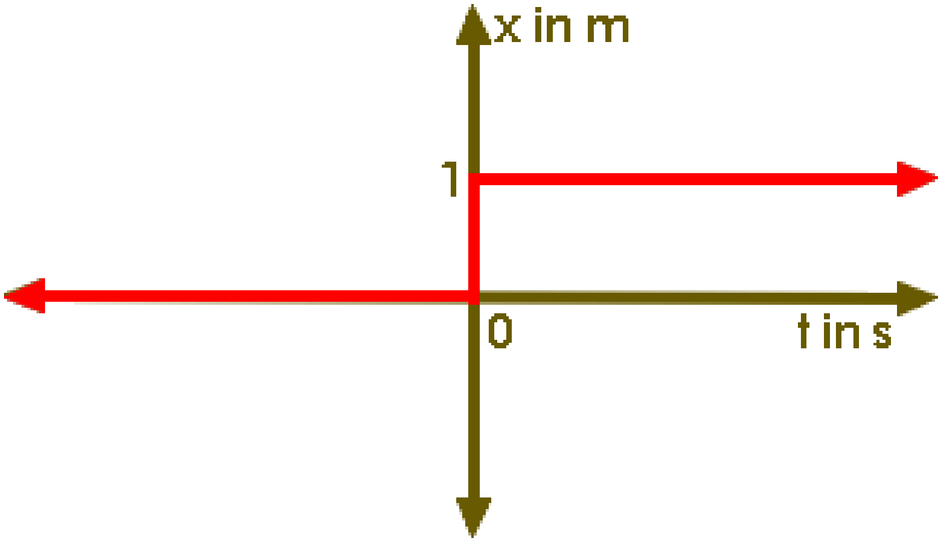
Beim zweiten Peak ist das Integral -2, also wird er um 2km/s langsamer (Er läuft dann mit 1km/s in die Gegenrichtung).

Da kein Peak mehr kommt, behält der Golfball diese Geschwindigkleit bis zum Ende bei.

Aufgabe 4

In einem Raum mit einem Radius von 1m wird zum Zeitpunkt 0 das Licht eingeschaltet.

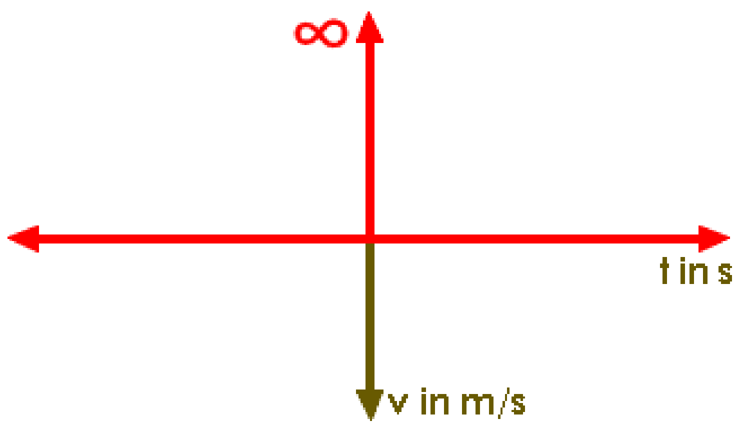
Wie schauen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsdistribution des Lichtradius aus?



LÖSUNG 4

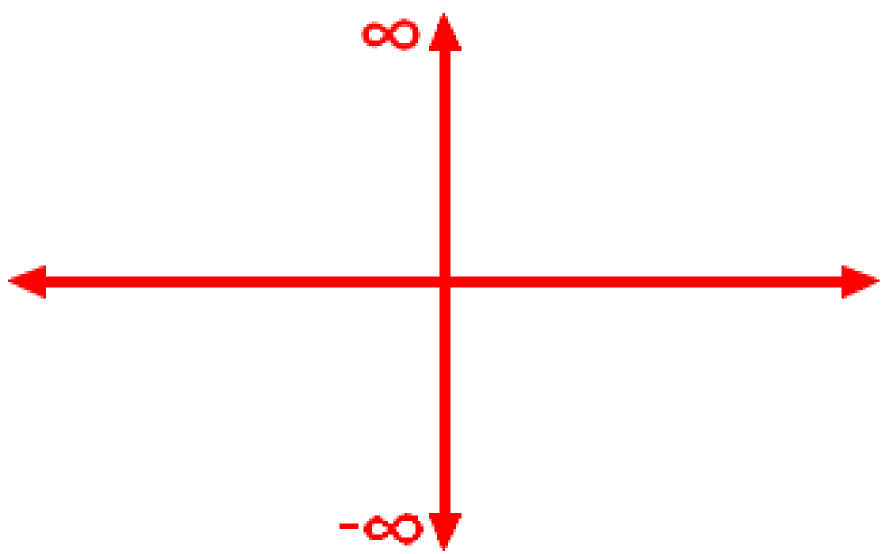
Da sich das Licht nahezu sofort im gesamten Raum ausbreitet, lässt sich die Geschwindigkeit analog zur Aufgabe 1A als Distribution angeben.

Lange Zeit hat man sogar geglaubt, dass die Geschwindigkeit des Lichts tatsächlich ∞ ist.



LÖSUNG 4

Die Beschleunigung entspricht der Ableitung dieser Distribution. Während das Licht eingeschaltet wird, beschleunigt das Licht auf fast ∞ m/s, zum selben Zeitpunkt bleibt es aber auch am Rand des Raumes stehen, was derselben negativen Beschleunigung entspricht. Man erhält also an der Stelle 0 einen Doppel-peak.

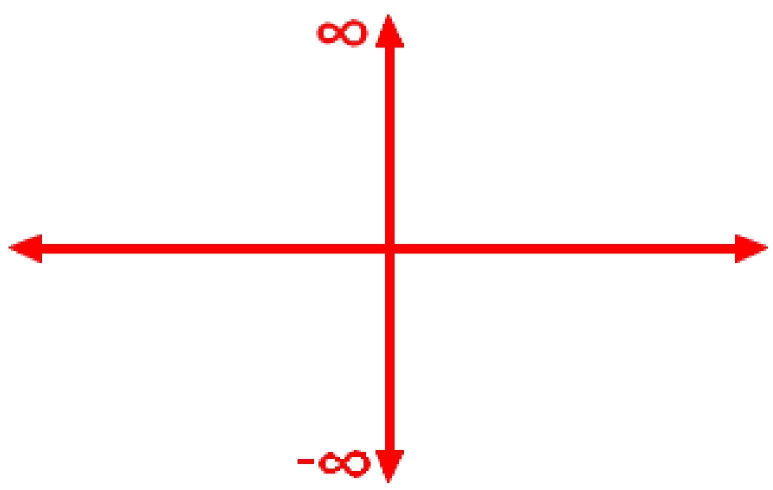


Aufgabe 5

Gegeben ist eine Distribution mit Doppelpeak.

A: Welche möglichen Integrale gibt es?

B: Wie muss man eine sinnvolle Testfunktion definieren?



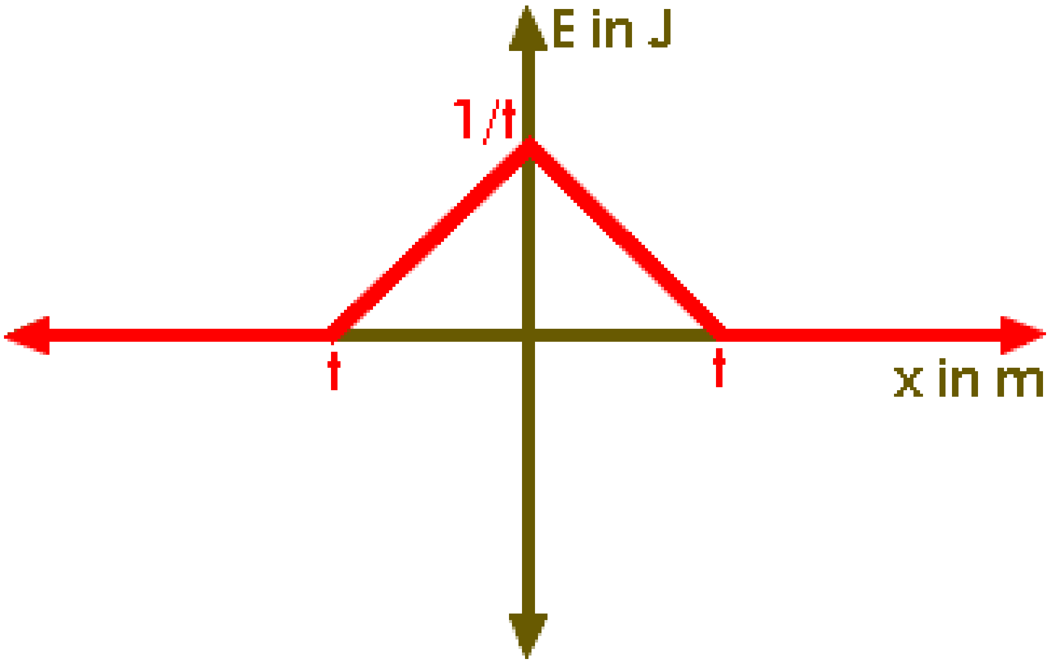
LÖSUNG 5

An der Stelle des Doppelpeaks kann im Integral entweder ein unendlich hoher Peak nach oben, oder ein unendlich hoher Peak nach unten oder wieder ein Doppelpeak sein.

In den ersten beiden Fällen ist es sinnvoll, das Integral des Integrals als Testfunktion anzugeben, damit man das Integral des Peaks kennt. Im dritten Fall muss man sich fragen, wie oft man integrieren muss, bis man einen Einfachpeak hat und von diesem Einfachpeak das Integral angeben.

Aufgabe 6

Eine punktförmige Energiequelle gibt Energie an einen 2-dimensionalen Leiter ab. Die Energie verteilt sich in Form einer Dreiecksfunktion.



Aufgabe 6

In dieser Funktion steht t für die Zeit in Sekunden. Die Dreiecksfunktion wird also mit der Zeit immer flacher und breiter.

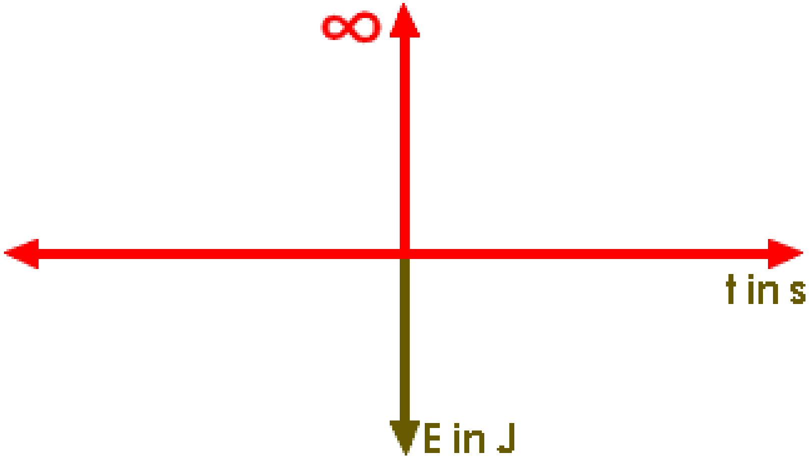
A: Welche Distribution und welche Testfunktion beschreiben die Energieverteilung zum Zeitpunkt $t=0$?

B: Wie groß ist die Gesamtenergie bei $t=0$? (Die Gesamtenergie ist das Integral der Energie nach dem Ort.)

Lösung 6

Zum Zeitpunkt 0 ist das Dreieck unendlich dünn (0) und unendlich hoch (1/0 = ∞).

Die Testfunktion gibt das Integral an (Sie entspricht also der Gesamtenergie). Diese ist zu jedem Zeitpunkt 1, folglich auch bei t=0 am Peak.



Aufgabe 7

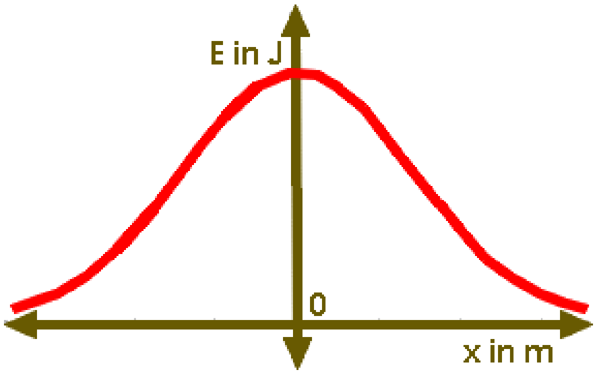
Die Angabe aus Aufgabe 6 ist konstruiert, damit man mit einfachen Zahlen die Eigenschaften einer Verteilungsfunktion üben kann.

Realistischer ist folgende Energieverteilung:

$$\frac{f(x)}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{t^2}}$$

Die Funktion f(x) gibt in diesem allgemeinen Beispiel die Leitfähigkeit des Materials an jeder Stelle x an. Man bezeichnet diese Funktion als Deltafunktion δ(x).

Aufgabe 7



Hier ist die Deltafunktion für ein konstantes positives f(x) dargestellt. Für andere f(x) muss man den Graph mit der Funktion multiplizieren.

Mit zunehmender Zeit wird die Funktion immer flacher und weniger hoch. Das Integral bleibt jedoch immer f(0). Die Distribution gegen die diese Kurve konvergiert nennt man Deltadistribution und kürzt sie $\int \delta(x) f(x)$ ab.

Aufgabe 7

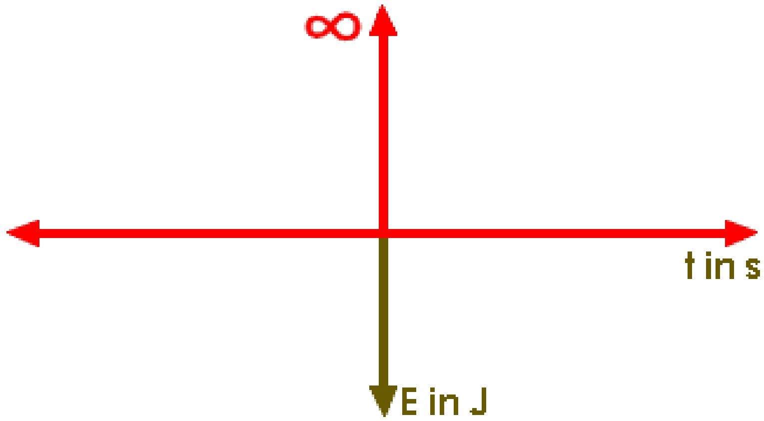
A: Gegen welche Distribution konvergiert die Deltafunktion für ein konstantes positives f(x).

B: Wie verhalten sich die Deltafunktionen bei $f(x)=x$, $f(x)=x^2$, $f(x)=1/x$ und $f(x)=\sqrt{x}$?

C: Interpretiere die Ergebnisse aus Aufgabe B wenn möglich physikalisch oder begründe warum sie physikalisch nicht sinnvoll sind.

Lösung 7A

Ähnlich wie in Aufgabe 6 wird die Funktion immer höher und schmaler während das Integral immer gleich bleibt. Auch hier entsteht eine Distribution bei x=0 während die Testfunktion an dieser Stelle dem Integral (f(0)) entspricht. Da die Funktion auch an der Stelle 0 positiv ist, zeigt der Peak nach oben.



LÖSUNG 7B

In der Deltafunktion ist eine Exponentialfunktion enthalten. Das garantiert, dass die Funktion schneller als jede Potenz abfällt und das Integral, also die Gesamtenergie in diesen Fällen immer endlich ist.

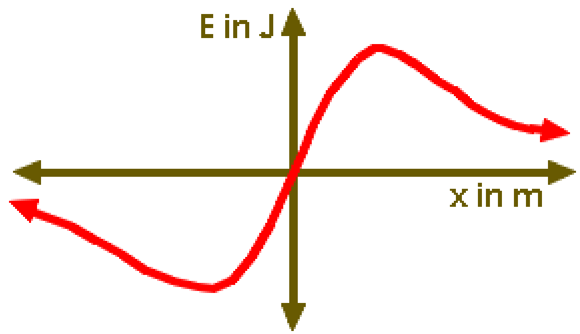
Allgemein lässt sich auch feststellen, dass die Extremstellen wenn t gegen 0 geht, immer näher zur y-Achse rücken und die Steigung immer steiler wird, sodass bei t=0 die Gesamtenergie stets zur Gänze in der Energiequelle bei x=0 sitzt.

LÖSUNG 7B-I

Die Funktion x ist auf der positiven Seite positiv und auf der negativen Seite negativ. Folglich wird auch die positive Deltafunktion auf der linken Seite in den negativen Bereich geworfen.

Da die x-Funktion Nullpunktsymmetrisch und die Deltafunktion Achsensymmetrisch ist, ist die gesamte Funktion Nullpunktsymmetrisch. Das Integral, das rechts oberhalb der Achse liegt, ist folglich gleich groß wie das negative Integral links unterhalb der Achse, so dass die Gesamtenergie stets Null ergibt.

Lösung 7B-I



Die Maxima auf beiden Seiten rücken, wenn t gegen 0 geht, Richtung Achse und gehen gegen unendlich während ihre Umgebung gegen 0 abfällt.

Bei t=0 treffen sich beide Peaks auf der Achse und es kommt zu einem Doppelpeak. Die Testfunktion bei diesem Doppelpeak ist 0.

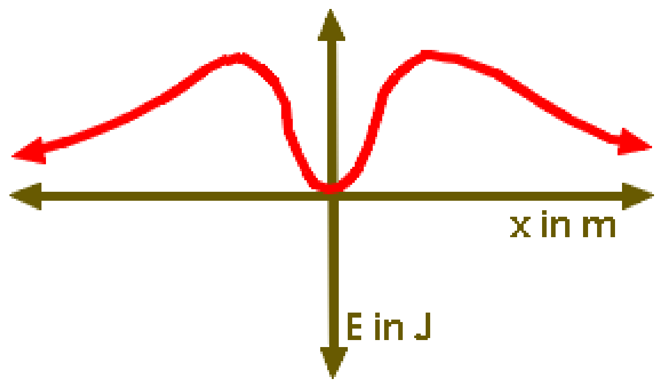
LÖSUNG 7C-I

Da die Funktion auf beide Seiten der Achsen geht, gibt es zwei unterschiedliche Energien, die genau in die entgegengesetzte Richtung wirken (zum Beispiel die positive und die negative Ladung).

Am Anfang ist in der Energiequelle gleich viel positive wie negative Ladung, so dass die Ladung überall 0 ist. Dann gehen die positiven Ladungen vermehrt nach rechts und die negativen Ladungen vermehrt nach links (zum Beispiel weil ein Magnet sie anzieht), sodass die Gesamtladung rechts positiv und die Gesamtladung links negativ ist.

LÖSUNG 7B-II

Die Funktion x^2 ist überall positiv nur an der y-Achse 0. Die Deltafunktion wird folglich in der Mitte zur Achse hin eingedellt.



Wenn t gegen 0 geht, wandern auch in diesem Beispiel die Maxima Richtung y-Achse. Sie werden genauso wie die gesamte Funktion immer niedriger, bis sie bei t=0 nur noch auf der Achse liegt.

LÖSUNG 7C-II

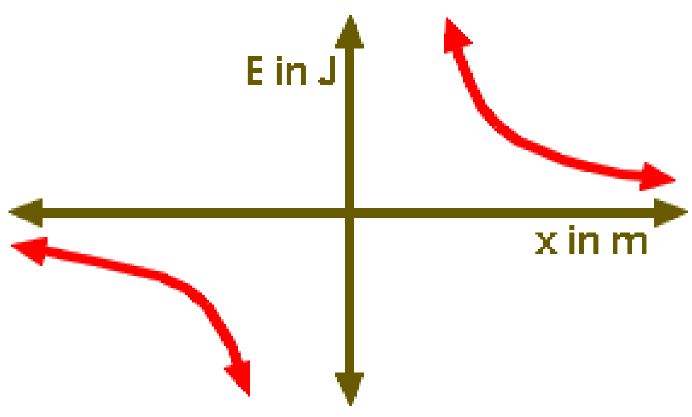
Die physikalische Interpretation mit der Energie ist bei diesem Beispiel nicht mehr möglich, weil durch die ständige Zunahme der Gesamtenergie der Energieerhaltungssatz verletzt wäre.

Anwenden lässt sich dieses Beispiel nur auf Größen, die dauernd zunehmen, wie zum Beispiel die Entropie.

Beispielsweise könnte man die Kurve als immer größer werdenden Hurrikan interpretieren, der an den Maximumstellen besonders stark ist und besonders viel zerstört. Der Punkt 0 wäre dann genau im Auge des Hurrikans.

Lösung 7B-III

Die Funktion 1/x geht an der Stelle 0 gegen ∞, dadurch geht an dieser Stelle auch die Deltafunktion gegen ∞. Durch die Nullpunktsymmetrie ist die Gesamtenergie analog zum Beispiel I dennoch immer 0.



LÖSUNG 7B-III

Für t gegen 0 geht die Funktion immer näher zu den Achsen, bis sie bei t=0 nur noch aus einem Doppelpeak an der Stelle 0 besteht, bei dem die Testfunktion 0 ist.

Jetzt kann man einwenden, dass die Funktion 1/x an der Stelle 0 gar nicht den Wert 0 hat. Der linksseitige Grenzwert an der Stelle 0 ist jedoch ∞ (oberer Peak) und der rechtsseitige -∞ (unterer Peak). Im Mittel sind die beiden Grenzwerte 0.

LÖSUNG 7C-III

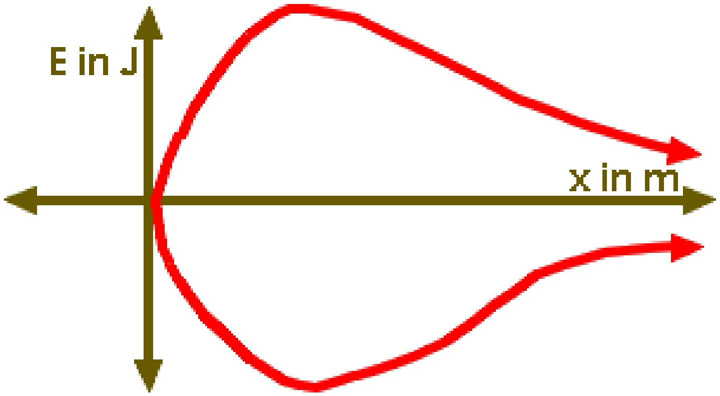
Man könnte versucht sein, die physikalische Interpretation analog zum Beispiel I mit positiver und negativer Ladung zu machen. Das funktioniert aber nicht, weil sowohl die Fläche auf der positiven Seite als auch die Fläche auf der negativen Seite ∞ groß sind, weil die Funktion nicht schnell genug gegen die y-Achse konvergiert.

Physikalisch gesehen würde das bedeuten, dass sowohl die positive Gesamtladung als auch die negative Gesamtladung ∞ ist und das kann beides nicht sein.

LÖSUNG 7B-IV

Die Wurzelfunktion hat auf der positiven Seite zwei Äste, auf der negativen keinen einzigen. Das gilt auch noch nach Multiplikation mit der Deltafunktion.

Das Integral der beiden Äste zusammen ist natürlich 0.



LÖSUNG 7B-IV

Wenn t gegen 0 geht, gehen die Maximalstellen zur y-Achse, ihre Höhe bleibt jedoch konstant bei ungefähr 0,3, weil sich die Wurzel mit der Wurzel aus der Deltadistribution wegkürzt.

Bei t=0 ergibt sich somit ein endlicher Doppelpeak zwischen 0,3 und -0,3. Die Testfunktion an dieser Stelle ist 0.

LÖSUNG 7C-IV

Man kann diese Lösung nicht wie in Aufgabe I als positive und negative Ladung interpretieren, denn sowohl die Fläche oberhalb der Kurve, als auch die Fläche unterhalb der Kurve nehmen mit zunehmender Zeit zu.

Das würde bedeuten, dass ständig neue Ladungen entstehen, was jedoch physikalisch unmöglich ist.

Physikalisch realistisch kann man damit nur Größen angeben, die laufend zunehmen und immer entgegengesetzt und gleich groß sind.

LÖSUNG 7C-IV

Ein mögliches Beispiel wäre eine Masse im Universum, bei dem die Gravitation nach innen genauso groß wie der Druck nach außen ist. Aufgetragen sind diese Kräfte nach dem Radius, so dass auch die leere der negativen Achse Sinn macht.

Zu Beginn handelt es sich nur um einen infinidesimal kleinen Massenpunkt. Durch die Anziehung von immer mehr Masse nehmen sowohl Druck als auch Gravitation laufend zu.

Bei kleinen Radien gibt es auch Druck und Gravitation in Gegenrichtung (von den weiter außen liegenden Teilchen) sodass insgesamt Druck und Gravitation abnehmen.

Aufgabe 8

Gegeben ist die Deltadistribution $\int \delta(b) f(a)$.

A: Wie verhält sie sich für $a=x+C$, $a=Cx$ und $a=g(x)$ wenn $b=x$ ist.

B: Wie verhält sie sich für $b=x+C$, $b=Cx$ und $b=g(x)$ wenn $a=x$ ist.

In dieser Aufgabe stellt C eine allgemeine Konstante und g(x) eine allgemeine Funktion dar.

Lösung 8a

Um Aufgabe 8a zu lösen, muss man nur die Angabe in die allgemeine Lösung aus Aufgabe 7a einsetzen.

Die Funktion $f(x+C)$ hat an der Stelle 0 den Wert $f(C)$, die Funktion $f(Cx)$ den Wert $f(0)$ und die Funktion $f(g(x))$ den Wert $f(g(0))$.

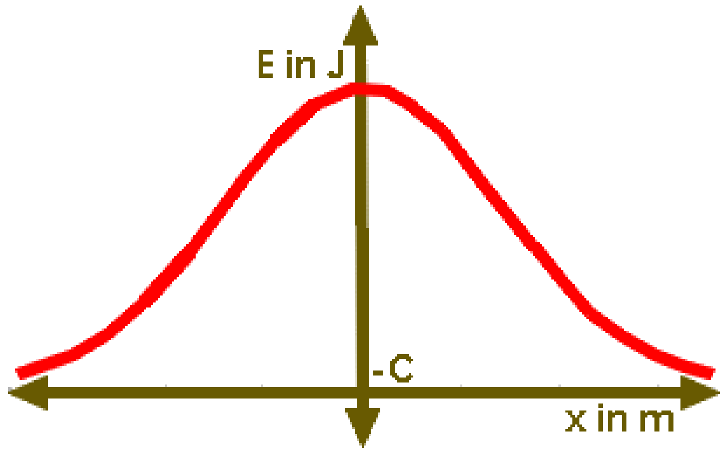
Die Grafik der Distribution ändert sich überhaupt nicht, es ändert sich nur die Testfunktion.

LÖSUNG 8B

Die Lösung des Beispiels 8b ist etwas schwerer, weil sich dabei die Funktion aus der die Distribution angenähert wird ändert.

Am leichtesten kann man das Beispiel lösen, wenn man schon in der Grafik aus der Angabe der Aufgabe 7 die neuen Funktionswerte einsetzt (neue Achsenskalierung ist Umkehrfunktion) und die Distribution dann erneut gegen 0 gehen lässt.

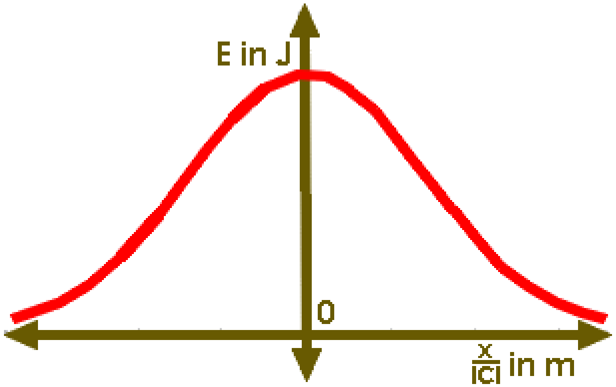
LÖSUNG 8B-I



Bei der Aufgabe I wird die Funktion um C verschoben, die Abstände bleiben gleich. Der Peak befindet sich also nicht mehr bei 0 sondern bei -C.

Das Integral ist nicht mehr f(0) sondern f(-C), weil die Funktion an der verschobenen Stelle -C ausgewertet wird.

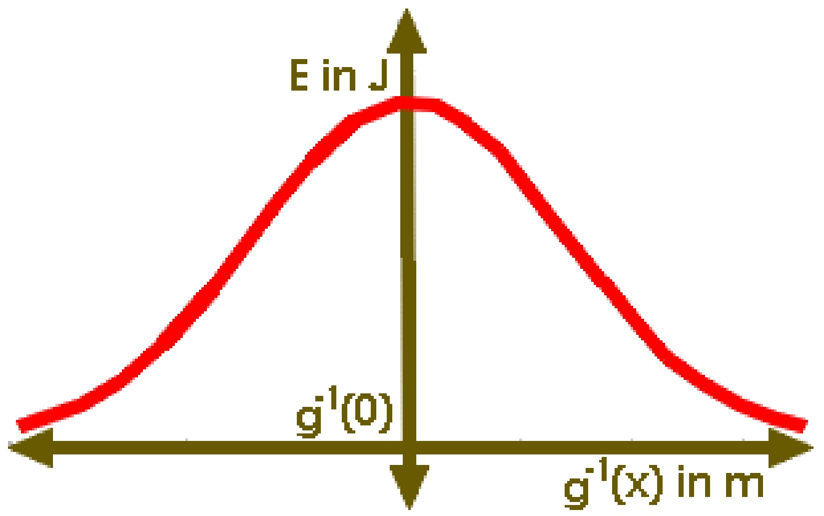
LÖSUNG 8B-II



Bei Aufgabe II wird die Funktion um C gestreckt bzw. gestaucht. Der Flächeninhalt unter der Kurve wird also durch |C| dividiert (Der Betrag deshalb, weil die Funktion bei negativen C um die y-Achse und nicht um die x-Achse gespiegelt wird, wodurch sich das Integral nicht ändert.

Die Funktion konvergiert gegen die selbe Distribution wenn auch mit einer anderen Geschwindigkeit. Das neue Integral und somit die neue Testfunktion beim Peak ist f(0)/|C|.

LÖSUNG 8B-III



Bei Aufgabe III entsteht der Peak bei $g^{-1}(0)$, also bei allen Nullstellen von g. Die Funktion mit der multipliziert wird ist folglich bei der iten Nullstelle N_i $f(-N_i)$. Diese Verschiebung ist analog zur Verschiebung aus Aufgabe I.

LÖSUNG 8B-III

Zusätzlich zur Verschiebung muss man auch die Dehnung der Distribution beachten (analog zu Aufgabe II). Diese entspricht stets dem Betrag der Ableitung von g(x).

Um den Wert der Testfunktion bei einem Peak auszuwerten, muss man Verschiebung und Stauchung anwenden.

$$\frac{f(-N_i)}{|g'(N_i)|}$$

Um das Integral über ganz $\mathbb{R}$ zu erhalten, muss man die Testfunktion bei allen Peaks summieren.

AUFGABE 9

Berechne $\int\delta(x/2+1)f(x)$ für $f(x)=x^2$ auf 2 Arten:

A: Durch Verkettung der Lösungsstrategie von 8B-I und 8B-II.

B: Durch Anwendung der Lösungsstrategie von 8B-III.

Kontrolliere durch Vergleich der Lösungen 9A und 9B, die Richtigkeit deiner Rechnung.

Lösung 9A

Zunächst wenden wir die Stauchung aus Aufgabe 8B-II an: $\int\delta(x+2)2f(x)$

Dann wenden wir die Verschiebung aus Aufgabe 8B-I an: $\int\delta(x)2f(x-2)$

Als nächstes setzen wir die Funktion ein: $\int\delta(x)2(x-2)^2$

Zuletzt werten wir die Deltadistribution aus:

$2(0-2)^2=8$

LÖSUNG 9B

Die Funktion $g(x)=x/2+1$ hat eine Nullstelle bei $x=-2$.

An der Stelle -2 hat die Funktion x^2 den Wert 4.

Die Funktion $g'(x)= \frac{1}{2}$ hat an jeder Stelle (auch bei -2) den Wert $\frac{1}{2}$.

Als Ergebnis erhält man folglich $4:\frac{1}{2} = 8$

Aufgabe 10

Über Funktionenfolgen wie die Deltadistribution werden Distributionen auch generell definiert. Für eine Distribution, muss eine Funktionenfolge existieren, so dass gilt:

1) Die Funktion konvergiert gegen die Distribution.
2) Das Integral konvergiert gegen die Testfunktion.
3) Jede Ableitung der Funktion konvergiert gegen jede Ableitung der Distribution.
4) Die Testfunktion entspricht an den Stellen, an denen die Stammfunktion definiert ist der Stammfunktion.

Aufgabe 10

A: Überprüfe, ob folgende Funktionenfolgen für t gegen ∞ eine Distribution definieren können:

x/t

sin(tx)

B: Wieso lässt sich die Distribution aus Aufgabe 1 als Distribution definieren?

C: Wieso lässt sich das Kroneckerdelta als Testfunktion definieren?

LÖSUNG 10A - I

Die Funktion x/t ist eine lineare Funktion, die mit der Zeit immer flacher wird und gegen eine konstante Funktion auf der x-Achse konvergiert.

Das Integral ist aufgrund der Nullpunktsymmetrie immer 0 und konvergiert auch gegen 0

Die erste Ableitung ist eine Konstante Funktion, die zur x-Achse hingeschoben wird, alle weiteren Ableitungen entsprechen immer der Nullfunktion.

Insgesamt erfüllt x/t also alle Voraussetzungen für eine Distribution.

LÖSUNG 10A - II

Die Funktion sin(tx) oszilliert immer schneller zwischen 1 und -1. Für t gegen ∞ hat die Funktion an jeder Stelle einen Doppelpeak zwischen 1 und -1.

Für alle Ableitungen gilt dasselbe nur für eine andere Amplitude (wegen der inneren Ableitungen).

Das Integral ist aufgrund der Nullpunktsymmetrie immer 0 und konvergiert auch gegen 0.

LÖSUNG 10B

Man kann zur Distribution aus Aufgabe 1 beliebig viele Funktionenfolgen finden, die die Definition erfüllen:

- Die Dreiecksfunktion aus Aufgabe 6.
- Die Deltadistribution jeder Funktion, die an der Stelle 0 den Wert 1 hat.
- Die verschobene Deltadistribution jeder Funktion, die an einer beliebigen Stelle 1 hat.
- Die gestauchte Deltadistribution jeder Funktion, die an der Stelle 0 einen beliebigen Wert hat.
- …

LÖSUNG 10C

Das Kroneckerdelta ist überall 0, nur an einer Stelle 1.

Man kann es als Testfunktion zu einer Distribution auffassen, die genau an dieser Stelle den Peak hat.

Im 2-dimensionalen Raum ist der Peak genau dort wo die Koordinaten gleich sind, dort handelt es sich also um einen Linienpeak entlang der 1. Mediane.

ALLE ANGABEN SIND OHNE GEWÄHR

Jedes [Feedback] hilft,
Die vorliegenden und künftigen Skripten
zu verbessern