Fourierreihen

Fourierreihen dienen zur Darstellung periodischer Funktionen.

Als Basis dafür dienen zwei Funktionen: Die Sinus- und die Cosinusfunktion. Durch Manipulation mit einer Konstanten C kann man die Eigenschaften auf vielfältige Weise verändern:

- Verschiebung entlang der x-Achse um C: sin(x+C)
- Verschiebung entlang der y-Achse um C: sin(x)+C
- Stauchung der Periode um C: sin(Cx)
- Streckung der Amplitude um C: Csin(x)

Insbesondere kann man durch Einführung mehrerer Konstanten mehrere Eigenschaften ändern. Beispielsweise ist bei der Funktion Ksin(Cx) die Amplitute um den Faktor K gestreckt und die Periode um den Faktor C gestaucht.

Durch Addition mehrerer manipulierter Sinus- und Cosinusfunktionen kann man auch sich einander überlagernde Schwingungen darstellen.

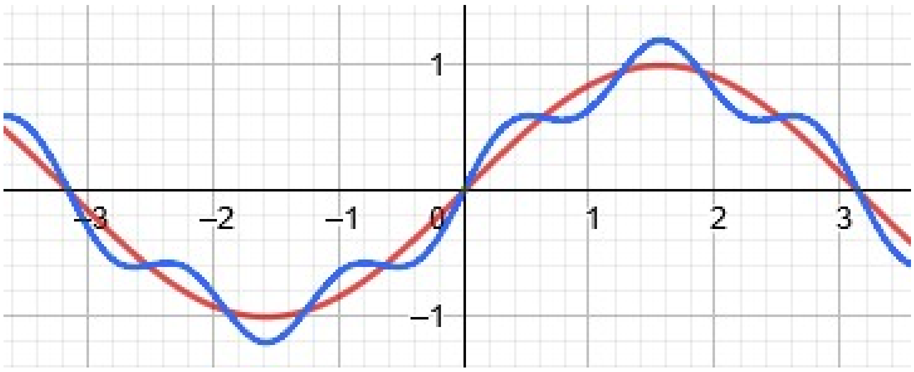


Abbildung 1: Die Funktion sin(x) (rot) und die Funktion 0,2sin(5x) überlagern sich zur Funktion sin(x)+0,2sin(5x) (blau).

Es gibt auch periodische Funktionen, die sich nur durch Überlagerung von unendlich vielen Funktionen darstellen lassen:

Eckige Funktionen: An den eckigen Stellen muss man Funktionen mit einer immer enger werdenden Krümmung dazuzählen. Erst bei unendlicher Krümmung wird die

Funktion eckig

Zum Beispiel Dreiecksfunktion

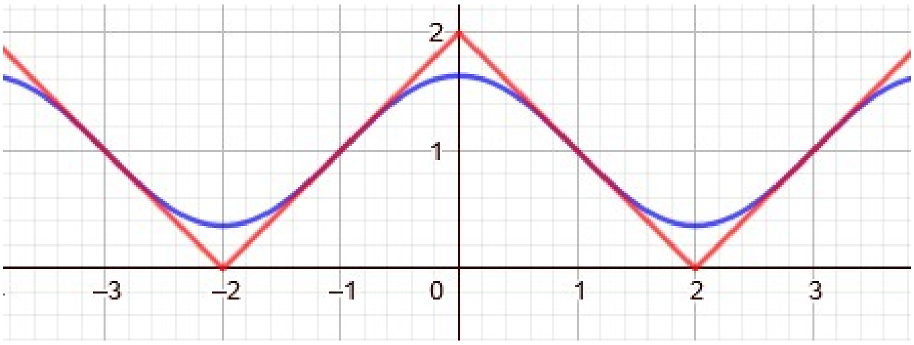


Abbildung 2: Die Funktion $1 + \frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}x)$ hat schon die richtige Höhe und Periode, an den Ecken muss man jedoch noch eine engere Kurve dazuzählen

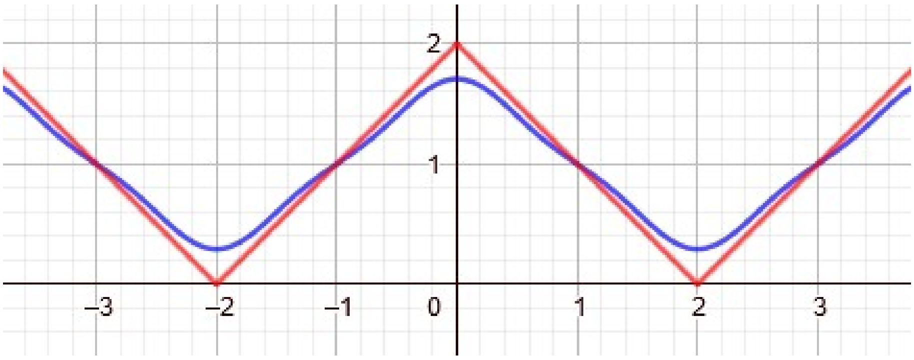


Abbildung 3: Die Funktion $1 + \frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}x) + \frac{2}{9\pi}cos(\frac{3\pi}{2}x)$. Man erkennt, dass die Funktion durch dazuzählen passender weiterer Funktionen immer enger in die Ecke hineinkommt. Eckig wird sie erst, wenn man unendlich viele Cosinusfunktionen addiert.

Unstetige Funktionen: Zum Beispiel Sägezahnfunktion

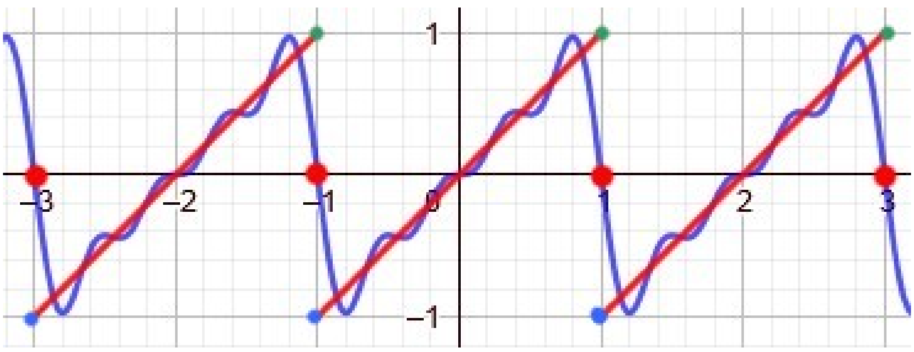


Abbildung 4: Die Funktion $\frac{2}{\pi}sin(\pi x) - \frac{1}{\pi}sin(2\pi x) + \frac{2}{3\pi}sin(3\pi x) - \frac{1}{2\pi}sin(4\pi x)$. Man erkennt, dass die Funktion an den Unstetigkeitsstellen besonders ungenau ist. Selbst durch dazuzählen endlich vieler weiterer passender Funktionen wird diese Ungenauigkeit nie kleiner als 8,9% der Sprunghöhe. Erst bei unendlich vielen Funktionen verschwindet diese Ungenauigkeit.

Dieses sogenannte Gibb'sche Phänomen tritt bei allen unstetigen Funktionen auf. Zudem ist es notwendig, dass die Funktion an den Unstetigkeitsstellen den Mittelwert zwischen linksseitigen Grenzwert (in der Grafik grün markiert) und rechtsseitigen Grenzwert (in der Grafik blau markiert) hat, weil sie sich sonst nicht einmal durch eine unendliche Summe darstellen lassen würde.

Funktionen mit unendlich vielen Krümmungen: Wenn man Funktionen mit einer immer kürzeren Periode addiert, werden die Krümmungen immer kleiner. Das führt zu Funktionen, bei denen man, egal wie weit man hineingezoomt hat, immer noch weitere noch kleinere Krümmungen findet.

1 Fourierreihe mit Periode 2π

Bevor man die Fourierreihe für alle Perioden herleitet, beginnt man mit den einfachsten Fourierreihen: Jenen mit der Periode 2π. Diese sind deshalb am einfachsten, weil die Funktionen cos(x) und sin(x) bereits die Periode 2π besitzen.

Um herzuleiten, wie man eine Fourierreihe für Funktionen mit der Periode 2π aufstellt, kann man die Sinus- und die Cosinusfunktion durch Manipulation mit Unbekannten so weit wie möglich Verallgemeinern um möglichst viele unterschiedliche Funktionen darstellen zu können. Dannach kann man herausfinden, wie man die dabei auftretenden Unbekannten für eine konkrete Funktion berechnet.

Die erste Verallgemeinerung betrifft die Periode: Sie kann auch kleiner als 2π sein, vorausgesetzt, sie geht sich ganzzahlig in 2π aus. Beispielsweise hat eine Funktion mit der Periode π auch die Periode 2π, weil in dem Intervall die Periode 2 mal durchlaufen wurde.

Somit haben auch die Funktionen cos(mx) und sin(nx) für alle ganzen Zahlen m,n die Periode 2π. Insbesondere erreicht man mit dieser Verallgemeinerung (durch Einsetzen von m=0 bzw. n=0) auch die konstanten Funktionen 0 und 1, die jede Periode, darunter auch die Periode 2π haben.

Die Amplitute und die Verschiebung entlang der y-Achse kann beliebig beeinflusst werden, ohne die Periode zu verändern. Somit gilt die Periode 2π für die Funktionen acos(mx)+c und bsin(nx)+k für jede reelle Zahl a,b,c,k. Insbesondere erreicht man mit dieser Verallgemeinerung (durch Einsetzen von n=0) jede konstante Funktion k.

Für die Verschiebung entlang der x-Achse ist keine Verallgemeinerung notwendig, denn es gilt laut Additionstheorem sin(x+c) = sin(c)cos(x)+cos(c)sin(x) und cos(x+c)=cos(c)cos(x)+sin(c)sin(x). Alle Verschiebungen haben daher die Form acos(x)+bsin(x) mit beliebigen reellen Zahlen a und b, eine Verallgemeinerung die man auch durch Überlagerung mehrerer Funktionen erhält.

Dieser Verallgemeinerung wollen wir uns im nächsten Schritt widmen. Alle Funktionen mit derselben Periode addieren sich zur Funktion asin(nx)+bcos(nx)+c (Es addieren sich sowohl alle Amplituden, als auch alle Verschiebungen entlang der y-Achse). Wenn man alle möglichen Perioden addiert, erhält man die allgemeinste Form einer Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) + c \tag{1.1}$$

Man muss nicht über negative n addieren, weil die Cosinusfunktion Nullpunktsymmetrisch cos(-nx)=-cos(nx) und die Sinusfunktion symmetrisch bezüglich der y-Achse sin(-nx)=sin(nx) ist. Damit werden alle Funktionen mit negativen n auch durch Addition über positive n erreicht. Über n=0 muss man auch nicht addieren, weil man damit nur eine konstante Funktion erhält, die bereits durch die Konstante c einbezogen ist. Damit vereinfacht sich 1.1 zu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) + c \tag{1.2}$$

Insbesondere erhält man dabei für alle Perioden, die nicht in der Funktion enthalten sind $a_n = 0$ bzw. $b_n = 0$. Beispielsweise sind bei der Funktion sin(x) alle Konstanten (abgesehen von $a_1 = 1$) gleich 0.

Um herauszufinden, wie man die Größe der Konstanten a_n, b_n und c berechnet, muss man die Gleichung 1.1. so umformen, dass die jeweils anderen Konstanten wegfallen. Um das zu erreichen, benötigt man einige Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktionen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx) = \pi \tag{1.3}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos^2(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} sin^2(nx) = \pi \tag{1.4}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)cos(mx) = \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)sin(mx) = 0 \tag{1.5}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)sin(mx) = \int_{-\pi}^{\pi} sin(nx)cos(mx) = 0 \tag{1.6}$$

Für die Formeln 1.3 - 1.6 gilt m$\neq$n und m,n$\in \mathbb{N}$.

Wenn man die Stammfunktion von 1.2. zwischen π und -π bildet fallen laut Summenregel und 1.2. alle Terme abgesehen von der Konstanten c weg. Man erhält

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} c = c\pi - c(-\pi) = -2\pi c \tag{1.7}$$

Umformen nach c ergibt

$$c = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \tag{1.8}$$

Wenn man die Funktion 1.2. mit cos(nx) multipliziert und dann die Stammfunktion zwischen π und -π bildet, fallen laut Summenregel und den Formeln 1.5 - 1.6 alle Terme abgesehen von $a_n cos^2(nx)$ weg. Man erhält

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx) = \int_{-\pi}^{\pi} a_n cos^2(nx) \tag{1.9}$$

Mit Hilfe von 1.4. kann man das Integral auf der rechten Seite auflösen und erhält

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx) = a_n\pi \tag{1.10}$$

Umformen nach a_n ergibt

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx) \tag{1.11}$$

Insbesondere erhält man durch Einsetzen von n=0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(0x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = 2c \tag{1.12}$$

Man kann daher in der Formel 1.2 statt c auch $\frac{a_0}{2}$ einsetzen. Damit erhält man die Formel

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx) \tag{1.13}$$

Die b_n erhält man analog zu den a_n, nur dass man 1.2. vor dem integrieren mit sin(nx) multipliziert. Man erhält

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx) \tag{1.14}$$

2 Fourierreihe mit der Periode L

Wir betrachten eine Funktion, die nicht die Periode 2π, sondern eine beliebige andere Periode L hat. Es gilt also f(x+L)=f(x). Um die Fourierreihe dieser Funktion zu berechnen, ist es am einfachsten, man staucht die x-Achse so, dass die Funktion die Periode 2π hat, wendet dann die Formel 1.13. an und streckt die x-Achse danach wieder auf die ursprüngliche Form.

Zum Stauchen der x-Achse dividiert man zunächst alle x-Werte durch die Periode der Funktion L, sodass die Funktion die Periode 1 hat (f($\frac{x}{L}$+$\frac{L}{L}$)=f($\frac{x}{L}$+1)=f($\frac{x}{L}$)). Dann multipliziert man alle Werte mit 2π, sodass die Funktion die Periode 2π besitzt (f($\frac{x2\pi}{L}$+2π)=f($\frac{x2\pi}{L}$)).

Durch Anwenden der Formel 1.13. erhält man die Fourierreihe im Bezugssystem der gestauchten x-Achse. Diese streckt man wieder, indem man sie zunächst durch 2π dividiert (um die Periode 1 zu erhalten) und dann wieder mit der ursprünglichen Periode L multipliziert.

3 Rechentipps

Bevor man anfängt, die Fourierreihe zu berechnen, sollte man sich überlegen, ob das Berechnen der Fourierreihe überhaupt Sinn macht. Wenn die Funktion aus der Angabe bereits nur aus Sinus- Cosinus- und konstanten Funktionen besteht, ist es nicht nur sinnlos die Fourierreihe auszurechnen, es kommt dabei auch die selbe Funktion heraus. (Allenfalls kann man sich damit das Additionstheorem der Sinus- und Cosinusfunktion herleiten, aber das geht mit der Euler'schen Formel leichter).

Dann muss man sich entscheiden, ob man die Funktion nur genähert oder ganz exakt benötigt. Die Fouriernäherung, bei der man sich nur endlich viele a_n und b_n ausrechnen muss, ist aufgrund des Gibb'schen Phänomens nur für Werte, die weit von einer Unstetigkeitsstelle entfernt sind, praktikabel. Direkt an den Sprungstellen hilft nicht einmal das Aufstellen einer unendlich langen Fourierreihe. (Diese Punkte muss man, sofern sie nicht den Mittelwert zwischen rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwert darstellen, gezielt umdefinieren).

Als nächstes überlegt man sich, ob die Funktion achsensymmetrisch, nullpunktsymmetrisch oder weder noch ist. Wenn die Funktion nullpunktsymmetrisch ist, lässt sie sich ausschließlich durch die ebenfalls nullpunktsymmetrische Cosinusfunktion darstellen (Man erspart sich das Berechnen der b_n, weil diese immer 0 werden). Analog ist das bei den achsensymmetrischen Funktionen, bei denen die Funktion nur durch die ebenfalls achsensymmetrischen Sinusfunktionen dargestellt wird, und man sich das berechnen der a_n erspart.

Wenn die Funktion weder achsensymmetrisch noch nullpunktsymmetrisch ist, kann man das Koordinatensystem so lange in x-Richtung verschieben, bis die Funktion achsensymmetrisch ist (das ist immer in der Mitte der Periode der Fall). Dafür setzt man in die Funktion statt x x+c ein, wobei c die Anzahl der Einheiten ist, um die man die x-Achse verschoben hat. Nachdem man die Fourierreihe ausgerechnet hat, muss man das Koordinatensystem zurückschieben, indem man für jedes x wieder x-c einsetzt.

Im nächsten Schritt berechnet man die notwendigen a_n und b_n indem man in die Formeln 1.11 bzw. 1.14 einsetzt. Meistens ist es zweckmäßig, alle a_n bzw. alle b_n auf einmal zu berechnen, indem man die Zahl n als Unbekannte einsetzt. Häufig benötigt man dabei die Formel 1.4. zum Integrieren und die Vereinfachungen sin(πn)=0 und cos(πn)=(-1)^n. Oft erleichtert auch das Umformen der Winkelfunktionen in Exponentialfunktionen mit Hilfe der Euler'schen Formel das Integrieren. Eventuell ist das Ergebnis schöner, wenn man nach der Integration aus den Exponentialfunktionen wieder Winkelfunktionen berechnet.

Nachdem man alle a_n und b_n in die Formel 1.13 eingesetzt hat, ist man mit dem Erstellen der Fourierreihe fertig.

4 Komplexe Fourierreihe

Mit Hilfe der Euler'schen Formel kann man sowohl die Sinus- als auch die Cosinusfunktion in Form einer Exponentialfunktion darstellen. Dieser Rechentrick wurde bereits erwähnt, um sich das Integrieren zu erleichtern.

Manchmal ist es auch sinnvoll, die Formel 1.13., mit der man die Fourierreihe berechnet, gleich zu Beginn mit Exponentialfunktionen anzuschreiben. Das hat den Vorteil, dass es nur noch eine Serie von Parametern (c_n) gibt. Allerdings stellt sich heraus, dass man diese von $-\infty$ bis ∞ summieren muss.

Mit welcher Fourierreihe das Rechnen leichter ist, hängt vom Beispiel ab, ist jedoch meist nicht erkennbar. Bei geraden oder ungeraden Funktionen ist es immer von Vorteil wenn man zunächst mit der reellen Fourierreihe losrechnet, weil man dann sowieso nur eine Serie von Parametern ausrechnen muss. Auch wenn man einer reellen Fourierreihe interessiert ist, ist das Rechnen mit der reellen Fourierreihe leichter, weil man sich dann das Zurückrechnen mit der Euler'schen Formel erspart.

Um die Komplexe Fourierreihe zu berechnen, setzt man für sin(nx) und cos(nx) in der reellen Fourierreihe die Euler'sche Formel ein

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2}(e^{inx} + e^{-inx}) + \frac{b_n}{2i}(e^{inx} - e^{-inx}) \tag{4.1}$$

Teilen der Summe ergibt

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} e^{-inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{2i} e^{-inx}) \tag{4.2}$$

In der zweiten und vierten Summe definiert man den Summationsindex so um, dass er genau das Negative von sich selbst ist. Damit erreicht man, dass alle Exponentialfunktionen einen positiven Exponenten haben. Da a_n achsensymmetrisch ist, gilt $a_n = a_{-n}$ und da b_n nullpunktsymmetrisch ist, gilt $b_n{=}-b_n$. Damit vereinfacht sich 4.2. zu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{a_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{b_n}{2i} e^{inx}) \tag{4.3}$$

Die ersten zwei Summen beziehen sich auf dieselbe Funktion. Man kann diese zusammen mit dem ersten Term (der wie durch Einsetzen leicht ersichtlich der Funktion bei n=0 entspricht) zu einer Summe von $-\infty$ bis ∞ zusammengefasst werden.

Auch die letzten beiden Summen können zu einer Summe von $-\infty$ bis ∞ zusammengefasst werden, denn der Term bei n=0 fällt weg. Damit vereinfacht sich 4.3. zu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{2} e^{inx} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{b_n}{2i} e^{inx} \tag{4.4}$$

Die beiden verbleibenden Summen lassen sich ihrerseits wieder zusammenfassen

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}) e^{inx} \tag{4.5}$$

Man definiert eine neue Serie von Konstanten

$$c_n = \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \tag{4.6}$$

Damit kann man die Fourierreihe noch kürzer anschreiben

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \tag{4.7}$$

Um die Größe der c_n zu berechnen, setzt man die Formel für a_n (1.11.) und die Formel für b_n (1.14.) in 4.6. ein. Damit erhält man die Formel

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sin(nx) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx) dx \tag{4.8}$$

Auch in diese Formel setzt man für Sinus und Cosinus die Euler'sche Formel ein

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2i} (e^{inx} - e^{-inx}) dx \tag{4.9}$$

Aus dem zweiten Integral zieht man die Konstante i heraus

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) dx - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) dx \tag{4.10}$$

Zusammenfassen des Integrals ergibt

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) - f(x) \frac{1}{2} (e^{inx} - e^{-inx}) dx \tag{4.11}$$

Hineinziehen des - in die zweite Klammer ergibt

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}) + f(x)\frac{1}{2}(-e^{inx}+e^{-inx})dx \tag{4.12}$$

Zusammenfassen der Klammern ergibt

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{2}(e^{inx}+e^{-inx}-e^{inx}+e^{-inx})dx \tag{4.13}$$

Zusammenfassen der Terme ergibt

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{4.14}$$

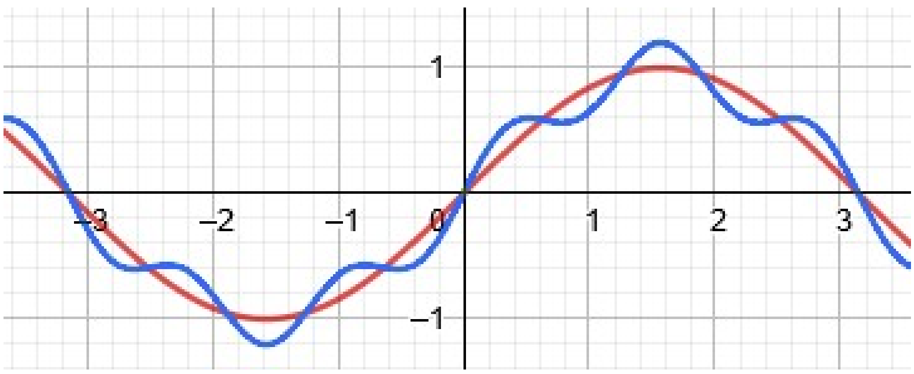
5 Spektrale Fourierreihe

Eine weitere Form der Darstellung der Fourierreihe, bei der man einige Eigenschaften leichter erkennen kann, ist die spektrale Form. Dabei benutzt man, dass jede Sinusfunktion durch Verschiebung auch als Cosinusfunktion dargestellt werden kann.

Im Gegensatz zur komplexen Form der Fourierreihe vereinfacht diese Darstellung das Rechnen nicht: Man erspart sich zwar den Parameter vor der Sinusfunktion, bekommt dafür aber einen Verschiebeparameter in der Cosinusfunktion.

Der Vorteil dieser Darstellung ist, dass alle Funktionen mit derselben Periode zusammengefasst werden. Dadurch kann man mit dieser Darstellung, beispielsweise aus einer Audiodatei alle Töne mit einer bestimmten Frequenz herausrechnen. Das ist zum Beispiel nützlich, wenn sich auf einer Musikkasette Störgeräusche befinden und man alle Geräusche abgesehen vom Musikstück herausfiltern will (Dann muss man nur die passenden Summanden von der Fourierreihe abziehen). Ganz leise Töne (mit einer sehr kleinen Amplitute) kann man immer herausfiltern: Es entsteht kein hörbarer Unterschied aber man benötigt weniger Speicherplatz.

Auch bei anderen Wellen (zum Beispiel Lichtwellen) kann man ganz analog einzelne Perioden gezielt herausfiltern.



In dieser Grafik sind zwei Töne mit einer unterschiedlichen Periode dargestellt, die sich gegenseitig überlagern. Mit Hilfe der Spektralform der Fourierreihe bekommt man eine Funktionsdarstellung, bei der alle Töne mit konstanter Periode in einem Summanden sind. (Also rote Kurve + Abweichung der blauen Kurve von der roten Kurve). Bei allen anderen Darstellungen der Fourierreihe funktioniert das nur, wenn die Periode aller Töne ein ganzzahliger Teil der Periode des Haupttons darstellt und man das Koordinatensystem so verschiebt, dass die Funktion entweder Achsen- oder Nullpunktsymmetrisch ist.

Um die spektrale Form der Fourierreihe herzuleiten, benutzt man das Additionstheorem

$$cos(x+k) = cos(k)cos(x) + sin(k)sin(nx) \tag{5.1}$$

Auf den nten Term der Fourierreihe angewendet bedeutet das

$$d_n cos(nx+k_n) = d_n cos(k_n)cos(nx) + d_n sin(k_n)sin(nx) \tag{5.2}$$

Der Term vor cos(nx) entspricht dabei dem a_n und der Term vor sin(nx) dem b_n. Insgesamt kann man damit die spektrale Form der Fourierreihe anschreiben

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n cos(nx+k_n) \tag{5.3}$$

Um alle Parameter d_n und k_n auszurechnen, setzt man den Parameter a_n mit dem Teil der Formel 5.2. der vor cos(nx) und den Parameter b_n mit dem Term vor sin(nx) gleich. Diese zwei Gleichungen ergeben ein Gleichungssystem mit zwei unbekannten, das man lösen kann.

$$a_n = d_n cos(k_n) \tag{5.4}$$

$$b_n = d_n sin(k_n) \tag{5.5}$$

Um den Term d_n zu erhalten, verwendet man die Beziehung $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$. Um diese Beziehung anzuwenden, muss man beide Gleichungen quadrieren und sie zusammenzählen. Man erhält

$$a_n^2 + b_n^2 = d_n^2 cos^2 k_n + d_n^2 sin^2 k_n = d_n^2 (cos^2 k_n + sin^2 k_n) = d_n^2 \tag{5.6}$$

Wurzel ziehen ergibt die Beziehung

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \tag{5.7}$$

Insbesondere gilt für n=0

$$d_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} \tag{5.8}$$

Da der Sinus von 0 wieder 0 ist, fällt b_0 weg und man erhält

$$d_0 = \sqrt{a_0^2} = a_0 \tag{5.9}$$

Man kann die spektrale Form der Fourierreihe somit auch ganz ohne a_0 berechnen

$$f(x) = \frac{d_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} d_n cos(nx + k_n) \tag{5.10}$$

Den Term k_n erhält man, indem man die Gleichungen durchdividiert

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{d_n cosk_n}{d_n sink_n} = cotk_n \tag{5.11}$$

Man kann die Gleichungen auch in der entgegengesetzten Reihenfolge durchdividieren und erhält damit eine andere Formel die zum selben Ergebnis führt

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{d_n sink_n}{d_n cosk_n} = tank_n \tag{5.12}$$

Umformen nach k_n führt zur Formel

$$k_n = arccot\frac{a_n}{b_n} = arctan\frac{b_n}{a_n} \tag{5.13}$$

6 Fouriertransformation

Die Zerlegung in unterschiedliche Töne mit Hilfe der Spektralzerlegung funktioniert nur für periodische Töne. Oft ist es aber so, dass sich die Tonhöhe ständig ändert. In dem Fall muss man die Periode ∞ verwenden.

Im Gegensatz zu endlichen Perioden (bei denen man die Funktionen mit den Perioden L, 2L, 3L und so weiter addieren kann), sind in einer Funktion mit einer unendlichen Periode alle Perioden erhalten. Das hat den Vorteil, dass man nicht in die Spektraldarstellung wechseln muss, um Töne mit allen Perioden herauszufiltern.

Der Nachteil ist, dass man nicht nur über unendlich viele, sondern auch über unendlich nah beieinanderliegende Funktionen integrieren muss. Statt der Serie von Konstanten c_n muss man daher eine kontinuierliche Funktion c(n), die jeder Periode eine Amplitute zuordnet verwenden. Statt der Summe muss man ein Integral verwenden (das entspricht der Fläche unter der Kurve, also der Summe aller Funktionshöhen).

Die Formel 4.7. verändert sich mit diesen Änderungen zu

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} c(n) e^{inx} dn \tag{6.1}$$

Die Funktion c(n) verändert sich im Vergleich zu der Serie von Konstanten c_n ebenfalls: Da die Periode unendlich lang (statt 2π) ist, verändert sich das Intervall über das integriert wird: Statt zwischen $-\pi$ und π muss man zwischen $-\infty$ und ∞ integrieren.

Das Hauptproblem ist jedoch der Vorfaktor $\frac{1}{\pi}$, der sich daraus herleitet, dass man durch die Hälfte der Periode dividiert. Dieser würde zu $\frac{1}{\infty} = 0$ werden, sodass alle Summanden 0 werden.

Die Lösung für das Problem ist, dass man den Vorfaktor willkürlich definiert und damit die Änderung der Fouriertransformation in Kauf nimmt. Nachdem man den gewünschten Ton herausgefiltert hat, muss man die Fouriertransformation wieder rückgängig machen, um die ursprüngliche Funktion ohne den Störton zu erhalten. Diesen Vorgang nennt man Rücktransformation.

Der Vorfaktor ist in unterschiedlichen Quellen unterschiedlich definiert. Wenn man den Vorfaktor $\frac{1}{2\pi}$ definiert, hat die Rücktransformation, dieselbe Form wie die Fouriertransformation. Um das ausnutzen setzt man diesen Vorfaktor ein:

$$c(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} dx \tag{6.2}$$

Man kann die Formel weiter vereinfachen, indem man die Wurzel aus dem Vorfaktor aus jedem c_n herauszieht. Da der Vorfaktor konstant ist, kann man ihn auch vor das Integral stellen und erhält damit zwei sehr ähnliche Gleichungen

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(n) e^{inx} dn \tag{6.3}$$

$$c(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-inx} dx \tag{6.4}$$

Möchte man alle Töne in einem bestimmten Frequenzintervall [a,b] eliminieren (zum Beispiel weil sich in dem Frequenzintervall ein Störgeräusch befindet), setzt man die Amplitude c(n) für diese n gleich 0. Damit ändert sich Formel 6.3. zu

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\int_{-\infty}^{a} c(n) e^{inx} dn + \int_{b}^{\infty} c(n) e^{inx} dn) \tag{6.5}$$

Das Ergebnis muss man mit den Formeln 6.3. und 6.4. wieder rücktransformieren. Natürlich kann man auch mehrere Frequenzintervalle auf einmal eliminieren, indem man mehrere Intervalle ausnimmt.

Möchte man alle Töne in einem bestimmten Amplitudenintervall eliminieren (zum Beispiel weil man ganz leise Töne eliminiert um Speicherplatz zu sparen), muss man mit der Umkehrfunktion $c^{-1}(n)$ berechnen, in welchen Frequenzintervallen die Amplitude in dem Intervall ist. Anschließend nimmt man diese Frequenzintervalle wie bei Formel 6.5. aus und führt die Rücktransformation durch.

Alle Angaben in diesem Skriptum sind ohne Gewähr. Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern.

7 Übungsaufgaben

1. Entwickle die Funktion 2sin(x)cos(x) in eine Fourierreihe
2. Entwickle die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \\ -1 & -\pi + 2n\pi < x < 2n\pi \end{cases} \tag{7.1}$$

in einer Fourierreihe
3. Entwickle die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} n & 2n\pi < x < \pi + 2n\pi \\ 0 & -\pi + 2n\pi < x < 2n\pi \end{cases} \tag{7.2}$$

in einer Fourierreihe
4. Entwickle die Funktion aus Aufgabe 1 in eine spektrale Fourierreihe 5. Entwickle die Funktion aus Aufgabe 2 in eine spektrale Fourierreihe
6. Entwickle die Funktion aus Aufgabe 3 in eine spektrale Fourierreihe
7. Berechne die Fouriertransformation der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ine^{inx} & 0 < x < 1 \\ 0 & sonst \end{cases} \tag{7.3}$$

und eliminiere alle Töne, die sich nicht im Frequenzintervall [-1,1] befinden

Aufgabe 1

Da die Funktion nur aus Sinus- und Cosinusfunktionen besteht, ist das Entwickeln in einer Fourierreihe nicht notwendig und man kann die Aufgabe einfacher durch Anwenden eines Addionstheorems lösen:

$$sin(x+y) = sin(x)cos(y) + sin(y)cos(x) \tag{7.4}$$

Durch Einsetzen von x = y erhält man auf der rechten Seite die Funktion aus der Angabe und auf der linken Seite die zugehörige Fourierreihe

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x) \tag{7.5}$$

Aufgabe 2

Da die Funktion Nullpunktsymmetrisch ist, muss man nur die Terme b_n berechnen (alle Terme mit a_n fallen sowieso weg).

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sin(nx)dx \tag{7.6}$$

Aufteilen des Integrals in zwei Flächen:

$$b_n = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x)sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} f(x)sin(nx)dx) \tag{7.7}$$

Das erste Integral deckt die Stellen ab, bei denen f(x)=-1 gilt, das zweite Integral die Stellen, bei denen f(x)=1 gilt:

$$b_n = \frac{1}{\pi}(\int_{-\pi}^{0} -sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} sin(nx)dx) \tag{7.8}$$

Berechnen der Stammfunktion mit der Umkehrung der inneren Ableitung ($\int f(Cx) = \frac{1}{C}F(Cx)$) und Herausziehen des Faktors $\frac{1}{n}$ aus dem Integral:

$$b_n = \frac{1}{n\pi}([cos(nx)]_{-\pi}^{0} + [-cos(nx)]_{0}^{\pi}) \tag{7.9}$$

Durch Einsetzen von cos(0)=1 erhält man:

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(1 - cos(-n\pi) - cos(n\pi) + 1) \tag{7.10}$$

Wegen der Nullpunktsymmetrie der Cosinusfunktion gilt $cos(n\pi) = -cos(-n\pi)$

$$b_n = \frac{1}{n\pi}(1 + cos(n\pi) - cos(n\pi) + 1) \tag{7.11}$$

Die Cosinusfunktionen kürzen sich weg, sodass in der Klammer -2 überbleibt:

$$b_n = -\frac{2}{n\pi} \tag{7.12}$$

Einsetzen von 0 für alle a_0 und a_n und $-\frac{2}{n\pi}$ für alle b_n führt auf die Fourierreihe

$$-\frac{2}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty} cos(nx) \tag{7.13}$$

Aufgabe 3

Da diese Funktion weder Nullpunkt- noch Achsensymmetrisch ist und die Fourierreihe nicht reell sein muss, kann man die komplexe Fourierreihe verwenden

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \tag{7.14}$$

Aufteilen des Integrals in zwei Flächen:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}(\int_{-\pi}^{0} f(x)e^{inx}dx + \int_{0}^{\pi} f(x)e^{inx}dx) \tag{7.15}$$

Das erste Integral deckt die Stellen ab, bei denen f(x)=0 gilt und fällt damit weg, das zweite Integral die Stellen, bei denen f(x)=n gilt:

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} ne^{inx}dx \tag{7.16}$$

Berechnung der Stammfunktion mit der Umkehrung der inneren Ableitung ($\int f(Cx) = \frac{1}{C}F(Cx)$) und Herausziehen des Faktors $\frac{1}{i}$ aus dem Integral

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}[e^{inx}]_{0}^{\pi} \tag{7.17}$$

Durch Einsetzen von $e^0 = 1$ erhält man:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}(e^{in\pi} - 1) \tag{7.18}$$

Da $e^{in\pi}$ für alle geraden n gleich 1 ist, fällt jeder zweite Term weg. Für alle ungeraden n ist $c_n = -\frac{1}{i\pi}$ (Polardarstellung der komplexen Zahlen). Um die Fourierreihe mit einer Summe darzustellen verwendet man die Summationskonstante m = 2n - 1, die nur bei den ungeraden Zahlen vorbeikommt.

$$-\frac{1}{i\pi}\sum_{m=1}^{\infty} e^{imx} \tag{7.19}$$

Aufgabe 4

Da die Cosinusfunktion genau so wie die Sinusfunktion aussieht, nur um 2π verschoben, erhält man die spektrale Fourierreihe indem man $sin(\phi) = cos(\phi + 2\pi)$ in der normalen Fourierreihe einsetzt. In der Fourierreihe aus Beispiel 1 gilt $\phi = 2x$, somit ist das Ergebnis:

$$cos(2x + 2\pi) \tag{7.20}$$

Aufgabe 5

In der spektralen Fourierreihe werden im Gegensatz zur normalen Fourierreihe alle Sinusfunktionen durch Cosinusfunktionen dargestellt. Da in der Fourierreihe aus Aufgabe 4 ausschließlich Cosinusfunktionen auftreten ist die spektrale Fourierreihe gleich der normalen Fourierreihe aus Aufgabe 2:

$$-\frac{2}{n\pi}\sum_{n=1}^{\infty} cos(nx) \tag{7.21}$$

Aufgabe 6

Die Fourierreihe aus Aufgabe 3 lautet:

$$-\frac{1}{i\pi}\sum_{m=1}^{\infty} e^{imx} \tag{7.22}$$

Um auf die Terme a_m und b_m zu kommen (das genügt, weil die Reihenmitglieder dazwischen wie oben gezeigt wegfallen) muss man die komplexe Fourierreihe mit Hilfe der Euler'schen Formel $e^{i\phi} = cos(\phi) + isin(\phi)$ mit $\phi = mx$ zu einer gewöhnlichen Fourierreihe umformen:

$$-\frac{1}{i\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(cos(mx) + isin(mx)) \tag{7.23}$$

Jetzt könnte man auf die Idee kommen, den Term sin(mx) durch $cos(mx + 2\pi)$ zu ersetzen. Das ist aber nicht sinnvoll, weil man dann kein einheitliches k_m und somit erst bei jeder Frequenz zwei unterschiedliche Schwingungen hat. Stattdessen muss man die Terme a_m und b_m mit den oben hergeleiteten Formeln zu d_m und k_m umformen.

Der Term vor dem Cosinus ist $b_m = \frac{1}{i\pi}$, der Term vor dem Sinus ist das ifache davon, also $a_m = \frac{i}{i\pi} = \frac{1}{\pi}$. Einsetzen in die Formel $d_m = \sqrt{a_m^2 + b_m^2}$ ergibt:

$$d_m^2 = \sqrt{-\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}} = 0 \tag{7.24}$$

Da d_m vor allen verbleibenden Termen steht, braucht man k_m nicht mehr berechnen, weil sich die Terme durch Multiplikation mit 0 sowieso wegkürzen.

Aufgabe 7

$$c(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-inx}dx \tag{7.25}$$

Da die Funktion außerhalb von [0,1]=0 ist, kann man diesen Teil beim Integrieren weglassen, innerhalb des Intervalls ist $f(x) = 2\pi in$

$$c(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{1} 2\pi ine^{-inx}dx \tag{7.26}$$

Herausziehen der Konstanten $\sqrt{2\pi}$ aus dem Integral und Kürzen mit Hilfe der Beziehung $2\pi = \sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}$, führt dazu, dass nur noch ine^{-inx} im Integral steht:

$$c(n) = \sqrt{2\pi} \int_{0}^{1} ine^{-inx}dx \tag{7.27}$$

Berechnen der Stammfunktion mit der Umkehrung der inneren Ableitung ($\int f(Cx) = \frac{1}{C}F(Cx)$) und kürzen des Vorfaktors -$\frac{1}{in}$ mit in zu -1:

$$c(n) = \sqrt{2\pi}[-e^{-inx}]_0^1 \tag{7.28}$$

Einsetzen der Grenzen und Ausnutzen der Beziehung $e^0 = 1$ führt zum Ergebnis:

$$c(n) = \sqrt{2\pi}(-e^{-in} + 1) \tag{7.29}$$

Umalle Frequenzen, deren Amplituten nicht im Intervall [-1,1] liegen, zu eliminieren, muss man von -1 bis 1 integrieren:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{1} \sqrt{2\pi}(-e^{-in} + 1)e^{inx}dn \tag{7.30}$$

Der Vorfaktor $\sqrt{2\pi}$ ist nicht von n abhängig und kann vor das Integral gezogen werden, wo er sich mit dem Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ wegkürzt. Die Klammer mit den Exponentialfunktionen kann ausmultipliziert werden.

$$f(x) = \int_{-1}^{1} -e^{in(x-1)} + e^{inx}dn \tag{7.31}$$

Berechnen der Stammfunktion mit der Umkehrung der inneren Ableitung ($\int f(Cx) = \frac{1}{C}F(Cx)$) und Herausziehen des Faktors $\frac{1}{in}$ aus beiden Termen:

$$f(x) = [\frac{1}{in}(-e^{in(x-1)} + e^{inx})]_{-1}^{1} \tag{7.32}$$

Einsetzen der Grenzen und Ausnützen der Beziehungen $\frac{1}{i} = -i$ und $\frac{1}{-i} = i$ ergibt:

$$f(x) = -i(e^{i(x-1)} + e^{ix}) - i(e^{-i(x-1)} + e^{-ix}) \tag{7.33}$$

Herausziehen von -i und umordnen der Terme ergibt

$$f(x) = -i(e^{i(x-1)} + e^{-i(x-1)} + e^{-ix} + e^{ix}) \tag{7.34}$$

Benutzen der Euler'schen Formel $cos(\phi) = \frac{1}{2}(e^{i\phi}+e^{-i\phi})$ für $\phi = x-1$ bzw. $\phi = -x$ ergibt

$$f(x) = 2cos(x-1) + 2cos(-x) \tag{7.35}$$