Indexnotation

Alle Angaben ohne Gewähr

Für Feedback bin ich sehr dankbar

Beweise das gilt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{ac}) - \mathbf{c}(\mathbf{ab})$

Dieses Beispiel kann man ziemlich umständlich lösen, indem man alle Komponenten anschreibt.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 \\ b_3c_1 - b_1c_3 \\ b_1c_2 - b_2c_1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} (a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1) - (a_3b_3c_1 - a_3b_1c_3) \\ (a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2) - (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_1) \\ (a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3) - (a_2b_2c_3 - a_2b_3c_2) \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\begin{pmatrix} a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3 \\ a_3b_2c_3 - a_3b_3c_2 - a_1b_1c_2 + a_1b_2c_1 \\ a_1b_3c_1 - a_1b_1c_3 - a_2b_2c_3 + a_2b_3c_2 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_2b_2 - c_1a_3b_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_3b_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} b_1a_1c_1 - b_1a_1c_1 + b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_2b_2 - c_1a_3b_3 \\ b_2a_2c_2 - b_2a_2c_2 + b_2a_1c_1 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_3b_3 \\ b_3a_3c_3 - b_3a_3c_3 + b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} b_1a_1c_1 + b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 - c_1a_1b_1 - c_1a_2b_2 - c_1a_3b_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_2c_2 + b_2a_3c_3 - c_2a_1b_1 - c_2a_2b_2 - c_2a_3b_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 + b_3a_3c_3 - c_3a_1b_1 - c_3a_2b_2 - c_3a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} (b_1a_1c_1 + b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3) - (c_1a_1b_1 + c_1a_2b_2 + c_1a_3b_3) \\ (b_2a_1c_1 + b_2a_2c_2 + b_2a_3c_3) - (c_2a_1b_1 + c_2a_2b_2 + c_2a_3b_3) \\ (b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 + b_3a_3c_3) - (c_3a_1b_1 + c_3a_2b_2 + c_3a_3b_3) \end{pmatrix} \tag{8}$$

$$\begin{pmatrix} b_1a_1c_1 + b_1a_2c_2 + b_1a_3c_3 \\ b_2a_1c_1 + b_2a_2c_2 + b_2a_3c_3 \\ b_3a_1c_1 + b_3a_2c_2 + b_3a_3c_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1a_1b_1 + c_1a_2b_2 + c_1a_3b_3 \\ c_2a_1b_1 + c_2a_2b_2 + c_2a_3b_3 \\ c_3a_1b_1 + c_3a_2b_2 + c_3a_3b_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} [a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3] - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} [a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3] \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] - \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right] \tag{11}$$

Die Indexschreibweise bietet die Möglichkeit, solche Beweise kürzer anzuschreiben. Die Idee dabei ist, dass man nicht alle drei Vektorkomponenten einzeln anschreibt, sondern wie die Vektorkomponente allgemein ausschaut.

Das wollen wir am Beispiel der Vektoraddition erläutern. Bisher haben wir diese so

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \tag{12}$$

angeschrieben. Betrachten wir nur die erste Vektorkomponente, erhalten wir die Beziehung

$$(\vec{a} + \vec{b})_1 = a_1 + b_1 \tag{13}$$

Das gilt analog für jede Vektorkomponente. Allgemein gilt daher für irgendeine Vektorkomponente i

$$(\vec{a} + \vec{b})_i = a_i + b_i \tag{14}$$

Verständnisfrage: Wie lautet die Vektorsubtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar in Indexnotation?

$$(\vec{a} - \vec{b})_i = a_i - b_i \tag{15}$$
$$(c\vec{a})_i = ca_i \tag{16}$$

Beim Skalarprodukt wird i zum Summationsindex

$$(\vec{a}\vec{b})_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{17}$$

n ist dabei die Anzahl der Dimensionen. Da keine komponentenweise Multiplikation in der Vektorrechnung vorkommt, gilt, wenn zwei gleiche Indizes in einer Multiplikation vorkommen immer, dass man über diese Summieren muss. Man kann deshalb festlegen, dass man das Summenzeichen nicht anschreiben muss, sobald zwei Komponenten mit dem gleichen Index multipliziert werden.

$$a_i b_i := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \tag{18}$$

Diese Definition nennt man Einstein'sche Summenkonvention.

Verständnisfrage: Wie lautet der Betrag in Indexnotation? Verwende die Einstein'sche Summenkonvention!

$$(|\vec{a}|)_i = \sqrt{a_i a_i} \tag{19}$$

Hier ist es notwendig, dass man das Quadrat als Multiplikation mit sich selbst aufschreibt, damit klar ist, dass man die Einstein'sche Summenkonvention verwenden darf.

Das Vektorprodukt schreibt man in Indexnotation

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \tag{20}$$

ϵ_{ijk} steht dabei für den Epsilontensor.

Einschub: Tensoren

- Tensor 0. Stufe: Skalar (Dem Buchstaben a wird eine Zahl zugeordnet)
- Tensor 1. Stufe: Vektor nter Ordnung (Jeder Komponente a_i für $i \in \mathbb{N}$,i<n wird eine Zahl zugeordnet)
- Tensor 2. Stufe: nxm-Matrix (Jeder Komponente a_{ij} für $i, j \in \mathbb{N}$, i<n, j<m wird eine Zahl zugeordnet)
-
-
- Tensor x. Stufe: Jeder Komponente $a_{ij...z}$ für $i, j, ...z \in \mathbb{N}$, i<n,j<m...z<a wird eine Zahl zugeordnet

Der Epsilon-Tensor ist ein Tensor dritter Stufe, für den gilt

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} &= 1 \qquad (21) \\ \epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} &= -1 \qquad (22) \\ \text{sonst } \epsilon_{ijk} &= 0 \qquad (23) \end{aligned}$$

Eselsbrücke: Wenn man vorwärts zählt ist der Epsilontensor 1, wenn man rückwärts zählt ist er -1, sind die Indizes durcheinander ist er 0 (ist man beim höchsten Index 3 angekommen, fängt man mit dem Zählen wieder bei 1 von vorne an).

In der ersten Komponente des Vektors gilt i=1. In dieser Komponente gilt laut Einsetzen in Formel 20 unter Verwendung der Einstein'schen Summenkonvention (Die Indizes j und k kommen doppelt vor, daher werden diese für alle j und k summiert).

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b})_1 = {} & \epsilon_{111} a_1 b_1 + \epsilon_{112} a_1 b_2 + \epsilon_{113} a_1 b_3 + \epsilon_{121} a_2 b_1 + \epsilon_{122} a_2 b_2 \\ & + \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{131} a_3 b_1 + \epsilon_{132} a_3 b_2 + \epsilon_{133} a_3 b_3 \end{aligned} \tag{24}$$

Alle Terme, in denen die Indizes des Epsilontensors durcheinander dastehen, fallen weg, weil diese mit 0 multipliziert werden. Es bleiben nur noch zwei Terme über

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 \tag{25}$$

Beim ersten Term wird vorwärts gezählt, man setzt daher 1 für den Epsilontensor ein. Beim zweiten Term wird rückwärts gezählt, man setzt daher -1 ein

$$(\vec{a} \times \vec{b})_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 \tag{26}$$

Verständnisfrage: Leite die zweite und dritte Komponente des Vektorprodukts aus der Indexschreibweise her!

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_2 &= \epsilon_{211} a_1 b_1 + \epsilon_{212} a_1 b_2 + \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{221} a_2 b_1 + \epsilon_{222} a_2 b_2 \\ &+ \epsilon_{223} a_2 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{232} a_3 b_2 + \epsilon_{233} a_3 b_3 \\ &= \epsilon_{213} a_1 b_3 + \epsilon_{231} a_3 b_1 = -a_1 b_3 + a_3 b_1\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a} \times \vec{b})_3 &= \epsilon_{311} a_1 b_1 + \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{313} a_1 b_3 + \epsilon_{321} a_2 b_1 + \epsilon_{322} a_2 b_2 \\ &+ \epsilon_{323} a_2 b_3 + \epsilon_{331} a_3 b_1 + \epsilon_{332} a_3 b_2 + \epsilon_{333} a_3 b_3 \\ &= \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1\end{aligned} \tag{28}$$

Eigenschaften des Epsilontensors

1. Verschiebung der Indizes: $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$

Verständnisfrage: Mache dir diese Eigenschaft mit Hilfe der Eselsbrücke klar

- Wenn i,j,k vorwärts gezählt ist (z.B. 1,2,3), ist auch j,k,i (2,3,1) und k,i,j (3,1,2) vorwärts gezählt. In allen Fällen ist der Epsilon-Tensor 1
- Wenn i,j,k rückwärts gezählt ist (z.B. 3,2,1), ist auch j,k,i (2,1,3) und k,i,j (1,3,2) rückwärts gezählt. In allen Fällen ist der Epsilon-Tensor -1
- Wenn i,j,k durcheinander ist (z.B. 3,3,1), ist auch j,k,i (3,1,3) und k,i,j (1,3,3) durcheinander. In allen Fällen ist der Epsilon-Tensor 0

2. Umdrehung der Indizes: $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{kji}$

Verständnisfrage: Mache dir diese Eigenschaft mit Hilfe der Eselsbrücke klar

- Wenn i,j,k vorwärts gezählt und damit 1 ist (z.B. 1,2,3), ist k,j,i rückwärts gezählt (3,2,1) und damit -1
- Wenn i,j,k rückwärts gezählt und damit -1 ist (z.B. 3,2,1), ist k,j,i vorwärts gezählt (1,2,3) und damit 1
- Wenn i,j,k durcheinander und damit 0 ist (z.B. 3,3,1), ist auch k,j,i durcheinander (1,3,3) und damit ebenfalls 0

3. Die Beziehung $\epsilon_{ijk} a_j b_k = \vec{a} \times \vec{b}$ erhält man direkt, wenn man das Gesetz für die Indexnotation des Kreuzprodukts umdreht.

4. Die Kombination zweier Epsilon-Tensoren, wobei der erste Index gleich ist ($\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$) wird benötigt, wenn zwei Vektorprodukte aufeinander treffen (der Index für die Komponente bleibt gleich, die Summationsindizes sind verschieden). Das Ergebnis dieser Rechnung ist

$$1 \quad \text{wenn} \quad j = m \text{ und } k = n \tag{29}$$
$$-1 \quad \text{wenn} \quad j = n \text{ und } k = m \tag{30}$$
$$0 \quad \text{sonst} \tag{31}$$

Verständnisfrage: Mache dir diese Eigenschaft mit Hilfe der Eselsbrücke klar

- Wenn i,j,k und i,l,m beide vorwärts gezählt und damit 1 sind, muss aufgrund des ersten gleichen Index auch j=l und k=m gelten.
- Wenn i,j,k und i,l,m beide rückwärts gezählt und damit die Multiplikation 1 ist, muss aufgrund des ersten gleichen Index auch j=l und k=m gelten.
- Wenn i,j,k vorwärts und i,l,m rückwärts gezählt oder umkekehrt sind und damit die Multiplikation -1 ist, muss aufgrund des ersten gleichen Index auch j=m und k=l gelten.
- In allen anderen Fällen ist einer der beiden Epsilon-Tensoren und damit auch die Multiplikation 0

Die Gleichungen 29 - 31 kann man mit einem weiteren Tensor, dem Kroneckerdelta δ_{ij} darstellen. Für diesen Tensor gilt

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{wenn} \quad i = j \tag{32}$$
$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{wenn} \quad i \neq j$$

Die Beziehung 29 - 31 vereinfacht sich damit zu

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{34}$$

Verständnisfrage: Mache dir klar, dass die Beziehungen 29 - 31 für die Formel 34 gelten!

- Wenn j=m und k=n ist, ist der erste Term 1 und der zweite Term 0
- Wenn j=n und k=m ist, ist der erste Term 0 und der zweite Term -1
- Wenn die Beziehungen 29 und 30 nicht gelten, werden beide Terme 0

Eigenschaften des Kroneckerdeltas

1. Vertauschung der Indizes: $\delta_{ij} = \delta_{ji}$

Verständnisfrage: Mache dir diese Eigenschaft anhand von Beispielen klar

- Wenn i=j ist auch j=i. In beiden Fällen ist das Kroneckerdelta 1
- Wenn i≠j ist auch j≠i. In beiden Fällen ist das Kroneckerdelta 0

2. Kombination zweier Kroneckerdeltas: $\delta_{ij}\delta_{ik} = \delta_{jk}$

Verständnisfrage: Mache dir diese Eigenschaft anhand von Beispielen klar

- Wenn j=k ist, ist das Kroneckerdelta genau in einer Komponente 1: Wenn i=j=k ist. Da man über alle i summieren muss, zählt man die eine Komponente die 1 ist, mit nur Komponenten die 0 sind zusammen.
- Wenn j≠k ist, wird das Kroneckerdelta immer 0: Entweder ist i≠j oder i≠k oder beides, was jeweils dazu führt, das mindestens einer der Faktoren 0 wird. In diesen Fällen zählt man nur 0er zusammen.

3. Kombination Vektor und Kroneckeradelta: $a_i\delta_{ij} = a_j$

Verständnisfrage: Mache dir diese Eigenschaft anhand von Beispielen klar

- Wenn i=j ist, wird das Kroneckerdelta 1 und die Komponente $a_i = a_j$ bleibt stehen.
- Wenn i≠j ist, wird das Kroneckerdelta 0 und die Komponente a_i fällt weg.
- Insgesamt wird über alle i summiert, das heißt zum Term a_j werden nur Nuller dazugezählt.

4. Die Beziehung $\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} = \epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}$ erhält man direkt durch Umdrehen der vierten Eigenschaft des Epsilon-Symbols

Beweise in Indexnotation

Um einen Beweis in Indexnotation durchzuführen, geht man wie folgt vor (Die einzelnen Schritte werden anhand des Beispiels aus der Einleitung vorgeführt)

1. Überführe einen Teil der Gleichung in die Indexnotation.

1a. Beginne mit dem Teil der Gleichung, der die meisten Kreuzprodukte beinhaltet. Das ermöglicht dir im zweiten Schritt, die Eigenschaften des Epsilontensors auszunutzen

Beispiel

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{35}$$

Man beginnt mit dem rechten Teil der Gleichung, weil dort zwei Kreuzprodukte vorkommen.

1b. Löse die Klammern von außen nach innen auf. Dadurch weißt du, welchen Komponentenindex du für die Operation innerhalb der Klammer verwenden sollst

Beispiel

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \tag{36}$$

Im ersten Schritt kümmert man sich um das Kreuzprodukt außerhalb der Klammer:

$$\epsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k \tag{37}$$

Dadurch weiß man, dass man für das Kreuzprodukt innerhalb der Klammer den Komponentenindex k verwenden muss

$$\epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \tag{38}$$

2. Umformen der Gleichung in Indexnotation

2a. Wenn ein Epsilon-Tensor vorkommt, benutze die vier Eigenschaften des Epsilon-Tensors. Ist auf der anderen Seite der Gleichung ein Skalarprodukt enthalten, versuche durch Anwendung der vierten Eigenschaft Epsilon-Tensoren in Kroneckerdeltas zu überführen. Ist auf der anderen Seite der Gleichung ein Kreuzprodukt enthalten, versuche mit der dritten Eigenschaft Epsilon-Tensoren in ein Kreuzprodukt zu überführen.

Beispiel

$$\epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m \tag{39}$$

Da in der Gleichung $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ ein Skalarprodukt vorkommt, muss man die Epsilon-Tensoren mit der vierten Eigenschaft in Kroneckerdeltas überführen. Das funktioniert nur, wenn der erste Index gleich und die Epsilon-Tensoren hintereinander sind. Wir verschieben deshalb mit Hilfe der ersten Eigenschaft die Indizes so lange, bis der erste Index gleich ist und verschieben das a_j mit Hilfe des Kommutativgesetzes für die Multiplikation nach hinten.

$$\epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m \tag{40}$$

Jetzt kann man durch Einsetzen in die vierte Eigenschaft, die Gleichung mit Kroneckerdeltas anschreiben

$$(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \tag{41}$$

2b. Wenn ein Kroneckerdelta vorkommt, benutze die vier Eigenschaften des Kroneckerdeltas. Ist auf der anderen Seite der Gleichung ein Skalarprodukt enthalten, versuche mit Hilfe der dritten Eigenschaft das Kroneckerdelta wegzukürzen. Ist auf der anderen Seite der Gleichung ein Kreuzprodukt enthalten, versuche mit der vierten Eigenschaft das Kroneckerdelta in einen Epsilontensor zu überführen.

Beispiel

$$(\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) a_j b_l c_m \tag{42}$$

Da in der Gleichung $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ ein Skalarprodukt vorkommt, muss man das Kroneckerdelta mit der dritten Eigenschaft wegkürzen. Das funktioniert nur, wenn das Kroneckerdelta mit einem Vektor multipliziert wird. Wir lösen deshalb die Klammer mit dem Distributivgesetz für Multiplikationen auf

$$\delta_{il}\delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im}\delta_{jl} a_j b_l c_m \tag{43}$$

Jetzt kann man durch Einsetzen beider Terme in die dritte Eigenschaft, die Gleichung ohne Kroneckerdelta anschreiben. Man kann sich aussuchen, welche der drei Vektoren man mit einem Kroneckerdelta in die dritte Eigenschaft einsetzt (das Ergebnis ist aufgrund der Kommutivität der Multiplikation dasselbe), solange der Index vom Vektor im Kroneckerdelta enthalten ist.

$$a_m b_i c_m - a_l b_i c_l \tag{44}$$

2c. Wenn weder ein Epsilontensor noch ein Kroneckerdelta in der Gleichung vorkommt und man keine Kreuzprodukte auf der anderen Seite der Gleichung stehen hat, ist es Zeit, die Gleichung wieder in Vektorschreibweise zu überführen. Hat man Kreuzprodukte auf der anderen Seite der Gleichung stehen, hat man in irgendeinem Schritt zu viele Kroneckerdeltas bzw. Epsilontensoren überführt.

Beispiel

Da in der Gleichung $\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b})$ keine Kreuzprodukte vorkommen, kann man mit dem Überführen in Vektorschreibweise beginnen.

3. Überführe die Gleichung in Vektornotation

3a. Fasse die Indizes mit gleicher Komponente zusammen und schreibe sie in Klammern. Das geht bei Addition, Subtraktion und Multiplikation gleichermaßen. Beginne dabei mit den Termen, die nah beieinander sind.

Beispiel

Im ersten Schritt fasst man die beiden m-Indizes und die beiden l-Indizes zu einem Skalarprodukt zusammen.

$$b_i(\vec{a}\vec{c}) - c_i(\vec{a}\vec{b}) \tag{45}$$

Im zweiten Schritt fasst man die beiden i-Indizes zu einer Vektorsubtraktion zusammen

$$\vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \tag{46}$$

Beweise die Beziehung $(\vec{a}\times\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c})$ in Indexnotation!

$$(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) \tag{47}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i(\vec{c} \times \vec{d})_i \tag{48}$$

$$\epsilon_{ijk} a_j b_k \epsilon_{ilm} c_l d_m \tag{49}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m \tag{50}$$

$$(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m \tag{51}$$

$$\delta_{jl}\delta_{km} a_j b_k c_l d_m - \delta_{jm}\delta_{kl} a_j b_k c_l d_m \tag{52}$$

$$a_l b_m c_l d_m - a_m b_l c_l d_m \tag{53}$$

$$(\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}) \tag{54}$$

Beweise die Beziehung $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [(\vec{a} \times \vec{b})\vec{d}]\vec{c} - [(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}]\vec{d}$ in Indexnotation!

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) \tag{55}$$

$$\epsilon_{ijk}(\vec{a} \times \vec{b})_j(\vec{c} \times \vec{d})_k \tag{56}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{jlm}a_l b_m \epsilon_{kno} c_n d_o \tag{57}$$

$$\epsilon_{kij}\epsilon_{kno}\epsilon_{jlm}a_l b_m c_n d_o \tag{58}$$

$$(\delta_{in}\delta_{jo} - \delta_{io}\delta_{jn})\epsilon_{jlm}a_l b_m c_n d_o \tag{59}$$

$$\delta_{in}\delta_{jo}\epsilon_{jlm}a_l b_m c_n d_o - \delta_{io}\delta_{jn}\epsilon_{jlm}a_l b_m c_n d_o \tag{60}$$

$$\epsilon_{jlm}a_l b_m c_i d_j - \epsilon_{jlm}a_l b_m c_j d_i \tag{61}$$

$$(\vec{a} \times \vec{b})_j c_i d_j - (\vec{a} \times \vec{b})_j c_j d_i \tag{62}$$

$$[(\vec{a} \times \vec{b})\vec{d}]c_i - [(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}]d_i \tag{63}$$

$$[(\vec{a} \times \vec{b})\vec{d}]\vec{c} - [(\vec{a} \times \vec{b})\vec{c}]\vec{d} \tag{64}$$