Räume und Abbildungen

Einleitung

Räume und Abbildungen sind zwei sehr verzahnte Themen, deshalb wurde ihnen ein gemeinsames Skriptum gewidmet.

In diesem Skriptum werden jeweils zunächst die grundlegendsten Definitionen an einfachen Beispielen erklärt. Danach folgen einige Fragen, anhand derer man nicht nur sein Verständnis der oben eingeführten Definitionen überprüfen, sondern sich auch gleich einige wichtige darauf aufbauende Sätze überlegen kann. Es ist daher nicht empfehlenswert, Aufgaben zu überspringen.

Alle Angaben in diesem Skriptum sind ohne Gewähr. Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern.

1 Abbildungen

1.1 Bildmenge und Urbildmenge

Abbildungen sind Zuordnungen zwischen zwei Mengen: Es wird jedem Element der Urbildmenge ein Element der Bildmenge zugeordnet.

Ein physikalisch anschauliches Beispiel für eine Abbildung ist ein Spiegel. Dabei wird jedem Element der Urbildmenge (der Menge der Orte, die gespiegelt werden) ein Element der Bildmenge (der Menge der Orte auf der Spiegeloberfläche) zugeordnet.

1.2 Injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

Man unterscheidet zwischen injektiven, surjektiven und bijektiven Abbildungen. Bei einer injektiven Abbildung kann jedem Element der Bildmenge maximal ein Element der Urbildmenge zugeordnet werden, bei einer surjektiven Abbildung mindestens ein Element und bei einer bijektiven Abbildung genau ein Element.

Ein gewöhnlicher Spiegel ist injektiv, surjektiv und bijektiv: Jeder Ort des Spiegels bildet genau einen Ort des davorliegenden Raumes ab. Ein Spiegel, auf dem ein Teil kaputt ist, ist nicht mehr surjektiv, denn an dieser Stelle wird nichts abgebildet und es existiert dort keine Zuordnung zur Urbildmenge. Ein Spiegel, der ums Eck geht ist nicht mehr injektiv, denn dort werden manche Objekte aus der Urbildmenge doppelt abgebildet. Ein Spiegel mit kaputten Stellen, der ums Eck geht ist sogar weder surjektiv noch injektiv.

1.3 Matrizen

Eine Abbildung kann mit Hilfe einer Tabelle, einer sogenannten Matrix dargestellt werden

$$\begin{pmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{pmatrix}$$

Dabei gibt a_{xx} die Auswirkung der x-Koordinate in der Bildmenge auf die x-Koordinate in der Urbildmenge, a_{xy} die Auswirkung der x-Koordinate in der Bildmenge auf die y-Koordinate in der Urbildmenge und so weiter an.

Die Matrix für einen gewöhnlichen Spiegel lautet beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Die x-Achse wird identisch auf den Spiegel abgebildet (daher die 1), die y-Achse genau spiegelverkehrt (daher die -1). Die z-Achse existiert im Spiegel überhaupt nicht, weil er nur 2-dimensional ist (daher gibt es auch keine Zeile für die Auswirkungen auf die z-Achse des Spiegels).

Aufgaben

1.a: Erkläre die Grundbegriffe der Abbildung am Beispiel eines Mikroskops mit 100-facher Vergrößerung!
1.b: Erkläre die Grundbegriffe der Abbildung am Beispiel der Funktion f(x,y)=2x+3y!

1.1.a: Wie lauten Bildmenge und Urbildmenge der Funktionen x^2, $\frac{1}{x}$ und $\sqrt{x}$ wenn man nur reelle Zahlen betrachtet?
1.1.b: Wie lauten Bildmenge und Urbildmenge der Reihe der Primzahlen?
1.1.c: Wie lauten Bildmenge und Urbildmenge des Standardskalarproduktes?

1.2.a: Welche der folgenden Funktionen sind surjektiv, injektiv bzw. bijektiv wenn man nur reelle Zahlen beobachtet: x^2, $\frac{1}{x}$ und $2x$?
1.2.b: Wie müsste man Bildmenge und Urbildmenge der Funktion $f(x) = x^2$ einschränken, damit die Funktion injektiv, surjektiv bzw. bijektiv wird?

1.3.a: Welche Auswirkungen haben die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$?
1.3.b: Welche Auswirkung hat die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ auf die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$?
1.3.c: Was passiert wenn man auf den Vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ zuerst die Matrix $\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ und

dann die Matrix $\begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix}$ anwendet? Kann man das auch mit nur einer Matrix erreichen?
1.3.d: Mit welcher Matrix kann man einen Vektor um den Winkel θ drehen?
1.3.e: Was sagen Zeilenanzahl und Spaltenanzahl der Matrix über die Abbildung aus?
1.3.f: Wie kann man die Abbildung zwischen Skalaren und Spaltenvektoren, zwischen Spaltenvektoren und Skalaren, zwischen Skalaren und Matrizen und zwischen Vektoren und Matrizen darstellen?

1.a. Das Mikroskop

Die Urbildmenge ist die Menge der Orte unter dem Mikroskop, die Bildmenge ist die Menge der Orte in der vergrößerten Abbildung. Ein Mikroskop ist bijektiv: Alles was unter dem Mikroskop liegt, wird vergrößert und alles was am Bild vergrößert ist, liegt unter dem Mikroskop. Die Abbildung kann mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Keine Achse verändert die Richtung aber jede wird 100-fach vergrößert.

1.b. f(x,y)=2x+3y

Die Urbildmenge ist die Menge aller zweidimensionalen Vektoren, die Bildmenge ist die Menge der reellen Zahlen. Die Abbildung ist nicht injektiv, beispielsweise kann die Zahl 9 durch den Vektor (3, 1) oder durch den Vektor (0, 3) erreicht werden. Surjektiv ist die Abbildung schon, jede reele Zahl r kann beispielsweise durch den Vektor (r/2, 0) erreicht werden. Die Abbildung kann mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$$

dargestellt werden. Die x-Koordinate des Vektors hat auf die einzige Koordinate des Skalars die doppelte, die y-Achse die dreifache Auswirkung

1.1. Bild und Urbild

1.1.a. Funktionen

Funktion	Bildmenge	Urbildmenge
x^2	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^+$
1/x	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^+$	$\mathbb{R}$

1.1.b. Reihe der Primzahlen

Das Urbild einer Reihe sind immer die natürlichen Zahlen, denn man kann die Reihenmitglieder nach der Reihe aufzählen. Damit kann man dem nten Mitglied einer Reihe die Zahl n zuordnen. Beispielsweise ist 3 die zweite Primzahl, also wird der Zahl 3 die Zahl 2 zugeordnet. Die Bildmenge ist die Menge der Primzahlen.

1.1.c. Standardskalarprodukt

Das Urbild ist die Menge der Vektorpaare mit gleich vielen Komponenten. Die Bildmenge ist die Menge der reellen Zahlen. Beispielsweise bildet das Standardskalarprodukt das Paar (a,b,c),(d,e,f) auf die Zahl ad+be+cf ab. Mit Vektoren, die unterschiedlich viele Komponenten haben wie zum Beispiel (a,b,c),(d,e) geht das nicht.

1.2. Surjektiv, Injektiv und Bijektiv

1.2.a. Funktionen

x^2 ist nicht injektiv. Beispielsweise wird die Zahl 4 zwei mal erreicht: Ein mal an der Stelle 2 und ein mal an der Stelle -2. Die Funktion ist auch nicht surjektiv. Beispielsweise wird die Zahl -4 überhaupt nicht erreicht.

Die Funktion $\frac{1}{x}$ ist nicht surjektiv, denn die Zahl 0 wird nicht erreicht. Injektiv ist die Funktion schon, weil keine Zahl doppelt erreicht wird.

Die Funktion 2x ist bijektiv weil jede Zahl erreicht, aber keine doppelt erreicht wird.

1.2.b. x²

Wenn man nur die positiven y-Werte betrachtet, ist x^2 surjektiv, denn dann nimmt man alle Werte, die nicht erreicht werden, aus der Bildmenge. Wenn man nur die positiven x-Werte betrachtet, ist sie injektiv, denn dann fallen alle doppelt erreichten Punkte weg. Wenn man nur den rein positiven Quadranten betrachtet, ist die Funktion sogar bijektiv, denn dann fällt beides weg.

1.3. Matrizen

1.3.a. Besondere Matrizen

Bei der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ wird die x-Koordinate der Urbildmenge unverändert auf die x-Koordinate der Bildmenge und die y-Koordinate der Urbildmenge unverändert auf die y-Koordinate der Bildmenge abgebildet. Es ändert sich also gar nichts. Deshalb wird diese Matrix auch Einheitsmatrix genannt.

Die Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ dehnt bzw. staucht die x-Koordinate um den Faktor a und die y-Koordinate um den Faktor b. Es kommt zu keinen Richtungsänderungen. Diese Art von Matrix wird Diagonalmatrix genannt, weil alle von 0 verschiedenen Einträge in einer Diagonale stehen.

Bei der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ wird die x-Achse auf die y-Achse und die y-Achse auf die negative x-Achse abgebildet. Anschaulich betrachtet ist das eine 90°-Drehung. Diese Matrix gehört zu den Drehmatrizen (beschreiben Drehungen) und zu den orthogonalen Matrizen (beschreiben Drehungen und Drehspiegelungen).

1.3.b. Allgemeine Matrizen

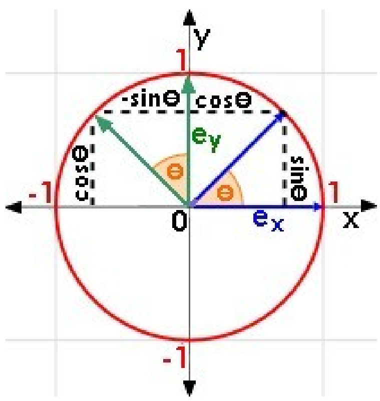
Bei der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gibt a die Auswirkung der x-Koordinate auf die x-Koordinate und b die Auswirkung der x-Koordinate auf die y-Koordinate an. Folglich lautet der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nach Anwendung der Abbildung $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Für die Anwendung auf die y-Koordinate macht man das gleiche mit der zweiten Zeile und erhält aus dem

Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ den Vektor $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ Ist der Vektor länger oder kürzer wird auch die Abbildung im gleichen Maße länger bzw. kürzer: Aus dem Vektor $\begin{pmatrix} e \\ 0 \end{pmatrix}$ wird der Vektor $\begin{pmatrix} ea \\ eb \end{pmatrix}$ und aus dem Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$ der Vektor $\begin{pmatrix} fc \\ fd \end{pmatrix}$. Wenn beide Komponenten bestzt sind, adieren sich die Auswirkungen. Aus dem Vektor $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ wird so der Vektor $\begin{pmatrix} ea + fc \\ eb + fd \end{pmatrix}$. Das Anwenden einer Matrix auf einen Vektor bezeichnet man als Matrix-Vektorprodukt.

1.3.c. Hintereinanderausführung von Matrizen

Durch Berechnung des Matrix-Vektorprodukts $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}$ erhält man $\begin{pmatrix} ac + be \\ ad + bf \end{pmatrix}$. Durch Anwendung des Matrix-Vektorprodukts aus $\begin{pmatrix} ac + be \\ ad + bf \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix}$ erhält man $\begin{pmatrix} (ac + be)g + (ad + bf)i \\ (ac + be)h + (ad + bf)j \end{pmatrix}$. Durch Umformen erhält man $\begin{pmatrix} a(cg + di) + b(eg + fi) \\ a(ch + dj) + b(eh + fj) \end{pmatrix}$. Diesen Vektor würde man auch durch Anwendung des Vektor-Matrixprodukts aus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} cg + di & ch + dj \\ eg + fi & eh + fj \end{pmatrix}$ erreichen. Das komprimieren zweier hintereinander ausgeführter Abbildungen zu einer bezeichnet man als Matrizenmultiplikation.

1.3.d. Drehmatrizen



Die Auswirkungen der x-Komponente des Vektors vor der Drehung auf den Vektor nach der Drehung kann man sich klar machen, indem man den Einheitsvektor in x Richtung um den Winkel ϕ dreht. Die x-Komponente des neuen Vektors, schreibt man in die xx-Komponente der Matrix und die y-Komponente in die xy-Komponente. Analog macht man das für die Auswirkungen der y-Komponente. Wie man anhand der nebenstehenden Grafik erkennen kann, lautet die Drehmatrix in zwei Dimensionen

$$\begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta \\ -sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Zur Herleitung der Drehmatrizen in drei Dimensionen, kann man dieselbe Grafik verwenden, nur dass man sich eine z-Achse vorstellen muss, die normal auf die x-y-Ebene aus dem Skriptum herausschaut. Diese wird bei der Drehung nicht verändert, die Matrix der Drehung um die z-Achse lautet daher

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man kann auch die Grafik so drehen, dass die x-z-Ebene im Skriptum liegt und die y-Achse normal aus dem Skriptum schaut. Wieder sieht die Grafik genau wie oben aus, nur dass statt y ein z steht. Für die Matrix bedeutet das, dass die y-Zeile mit der z-Zeile und die y-Spalte mit der z-Spalte tauscht.

$$\begin{pmatrix} cos\theta & 0 & -sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\theta & 0 & cos\theta \end{pmatrix}$$

Die Drehung um die x-Achse kann man sich wieder analog vorstellen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Man kann auch zuerst eine Drehung um die x-Achse, dann eine Drehung um die y-Achse und dann eine Drehung um die z-Achse mit drei unterschiedlichen Winkeln ausführen. Die allgemeinste 3-dimensionale Drehmatrix erhält man daher durch die Matrixmultiplikation aller drei Drehmatrizen miteinander

$$\begin{pmatrix} cos\phi & -sin\phi & 0 \\ sin\phi & cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} cos\psi & 0 & -sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ sin\psi & 0 & cos\psi \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\theta & -sin\theta \\ 0 & sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

Durch Ausführen der Matrizenmultiplikation erhält man

$$\begin{pmatrix} cos\phi cos\psi & -cos\theta sin\phi - cos\theta sin\psi sin\phi & sin\theta - cos\phi cos\theta sin\psi \\ cos\psi sin\phi & cos\phi cos\theta - sin\phi sin\psi sin\theta & -cos\theta sin\phi sin\psi - cos\phi sin\theta \\ sin\psi & cos\psi sin\theta & cos\psi cos\theta \end{pmatrix}$$

In n Dimensionen kann man sich immer noch mit demselben Bild helfen: In diesem Fall muss man sich zusätzlich zur Ebene n-2 Achsen vorstellen, die alle auf die Ebene normal sind und daher alle nicht verändert werden. Da man jede Koordinate mit allen anderen n-1 Koordinaten in die Ebene drehen kann, muss man (n-1)! Drehmatrizen miteinander multiplizieren.

1.3.e. Zeilen- und Spaltenzahl

Die Zeilenindizes geben an, welche Komponente des Urbildes die Auswirkungen auslöst. Folglich hat die Matrix genauso viele Spalten wie die Urbildmenge Dimensionen. Die Spaltenindizes geben an, auf welche Komponente der Bildmenge sich die Abbildung auswirkt. Folglich hat die Matrix genauso viele Zeilen wie die Bildmenge Dimensionen. Eine Matrix mit m Spalten und n Zeilen bezeichnet man als mxn-Matrix.

1.3.f. Tensoren

Man kann einen Skalar als Vektor mit nur einer Komponente auffassen. Folglich kann man die Abbildung zwischen einem Skalar und einem Spaltenvektor mit einer 1xn-Matrix, also einem Zeilenvektor darstellen.

$$\begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \end{pmatrix}$$

Dabei gibt a_x die Auswirkung der Zahl auf die x-Koordinate, a_y die Auswirkung der Zahl auf die y-Koordinate und so weiter an. Bei der Abbildung eines Vektors auf einen Skalar ist das genau andersherum und man benötigt einen Spaltenvektor.

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

hier gibt a_x die Auswirkung der x-Koordinate auf die Zahl a_y die Auswirkung der y-Koordinate auf die Zahl und so weiter an. Möchte man einen Skalar auf eine Matrix abbilden, benötigt man eine Matrix.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

dabei gibt a_{11} die Auswirkung der Zahl auf die Matrixkomponente in der ersten Zeile und der ersten Spalte an. Möchte man einen Vektor auf eine Matrix abbilden benötigt man ein Gebilde mit 3-Komponenten (1 Komponente für den Vektor und 2 Komponenten für die Matrix)

$$\begin{pmatrix} a_{x11} & a_{x12} & a_{x13} \\ a_{x21} & a_{x22} & a_{x23} \\ a_{x31} & a_{x32} & a_{x33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{y11} & a_{y12} & a_{y13} \\ a_{y21} & a_{y22} & a_{y23} \\ a_{y31} & a_{y32} & a_{y33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{z11} & a_{z12} & a_{z13} \\ a_{z21} & a_{z22} & a_{z23} \\ a_{z31} & a_{z32} & a_{z33} \end{pmatrix}$$

dabei gibt a_{x11} die Auswirkung der x-Komponente des Vektors auf die 11-Komponente der Matrix an. Man nennt ein Gebilde mit n Indizes Tensor nter Stufe. Ein Skalar ist ein Tensor nullter Stufe, ein Vektor ein Tensor erster Stufe und eine Matrix ein Tensor zweiter Stufe. Für höhere Tensoren gibt es keine eigenen Namen. Eine Abbildung eines Tensors mter Stufe auf einen Tensor nter Stufe, kann man mit einem Tensor m+nter Stufe darstellen, wobei die ersten m Indizes angeben, die Auswirkungen welcher Komponente des Tensors mter Stufe man betrachtet und die letzten n Indizes auf welche Komponente des Tensors nter Stufe sich das auswirkt.

2 Räume

2.1 Ordnungen

Räume dienen dazu, Elemente einer unendlich großen Menge zu ordnen.

Ein Beispiel für einen Raum ist die komplexe Zahlenebene. Dabei wird die Menge der komplexen Zahlen sowohl nach dem Realteil, als auch nach dem Imaginärteil geordnet.

2.2 Dimensionen

Die Dimension gibt die Anzahl der Parameter an, nach denen die Menge geordnet wird. Man kann jedem Parameter eine Achse zuordnen, sodass ein n-dimensionaler Raum in einem n-dimensionalen Anschauungsraum dargestellt werden kann.

Die komplexen Zahlen werden in der komplexen Zahlenebene nach zwei Parametern geordnet: Nach dem Realteil und nach dem Imaginärteil. Folglich handelt es sich dabei um eine zweidimensionale Menge, die man in einer zweidimensionalen Ebene darstellen kann.

2.3 Vollständigkeit

Man bezeichnet eine Menge als vollständig, wenn man sie in allen Dimensionen unendlich dicht darstellen kann.

Die Menge der komplexen Zahlen ist vollständig in 2 Dimensionen, weil sich auf jedem Intervall des Real- und des Imaginärteils unendlich viele komplexe Zahlen befinden. Die Menge der ganzzahligen komplexen Zahlen ist nicht vollständig, weil Lücken in der Ebene existieren, bei denen sich kein Element der Menge befindet.

2.4 Rechnen mit Räumen

Man versucht Räume wenn möglich so zu definieren, dass man mit den in ihnen dargestellten Punkten so rechnen kann, wie mit Vektoren im Anschauungsraum. Das funktioniert jedoch nicht immer. Die Rechenarten, die übertragen werden können, bezeichnet man als Struktur.

Komplexe Zahlen kann man so addieren, subtrahieren und mit einem Skalar (reelle Zahl) multiplizieren wie Vektoren. Das Skalarprodukt lässt sich jedoch nicht mehr auf komplexe Zahlen übertragen.

2.5 Strukturerhaltende Abbildungen

Strukturerhaltende Abbildungen sind Abbildungen, nach deren Anwendung die Struktur erhalten bleibt.

In der komplexen Zahlenebene besteht die Struktur aus Addition und Multiplikation mit einem Skalar. Für strukturerhaltende Abbildungen muss daher gelten $a + b = c \Rightarrow f(a) + f(b) = f(c)$ und $de = g \Rightarrow df(e) = f(g)$ für $d \in \mathbb{R}$. Da das Skalarprodukt nicht zur Struktur gehört, muss nicht gelten $hj = k \Rightarrow f(h)f(j) = f(k)$.

Aufgaben

2.a: Erkläre die Grundbegriffe des Raums am Beispiel eines Anschauungsraums!
2.b: Erkläre die Grundbegriffe des Raums am Beispiel der Ebene z(x,y)=2x+3y

2.1.a: Wie unterscheidet sich die Ordnung in einem 1-dimensionalen Raum von der Ordnung in einer Liste bzw. die Ordnung im 2-dimensionalen Raum von der Ordnung in einer Tabelle?

2.2.a: Kann man die komplexen Zahlen auch in einem 1-dimensionalen oder in einem 3-dimensionalen Raum darstellen? Wie wirkt sich das auf Eindeutigkeit und Vollständigkeit aus?
2.2.b: Kann man jedem Raum eindeutig eine Dimension zuordnen? Kann diese Dimension auch 0 oder ∞ werden?

2.4.a: Stelle die Menge der komplexen Zahlen mit Betrag 1 so dar, dass sie eindeutig und vollständig ist und dass Multiplikation und Division zu einer Addition bzw. Subtraktion wird.
2.4.b: Stelle die Menge der Polynomfunktionen so dar, dass sie eindeutig ist!

2.5.a: Welche Struktur können Räume haben?
2.5.b: Wie schauen die strukturerhaltenden Abbildungen zur Addition, Multiplikation mit einem Skalar und Skalarprodukt aus? Überlege es dir zuerst für eine Dimension und verallgemeinere dann auf höhere Dimensionen!

2.a. Der Anschauungsraum

Im Anschauungsraum wird die Menge aller Raumpunkte nach den drei Raumkoordinaten geordnet. Er hat drei Dimensionen und ist vollständig (vorausgesetzt er dehnt sich in alle Richtungen unendlich weit aus), da alle existierenden Raumpunkte unendlich nah beisammen liegen. Der Anschauungsraum lässt sich sowohl grafisch, als auch rechnerisch direkt in den Anschauungsraum übertragen.

2.b. z(x,y)=2x+3y

Die Ebene z(x,y) ist eine Ebene, die in Richtung der positiven x-Achse den Anstieg 2 in Richtung der positiven z-Achse und in Richtung der positiven y-Achse den Anstieg 3 in Richtung der positiven z-Achse besitzt. Die Punkte dieser Fläche können daher in 2 Dimensionen nach den Vektoren (1,0,2) und (0,1,3) geordnet werden. Da die Fläche unendlich dicht ist und unendlich weit reicht, ist der Raum vollständig. Wenn man die z-Achse so legt, dass sie normal auf die Ebene steht, ändert sich dadurch nichts an Addition, Subtraktion und beliebigen Multiplikationen, folglich übertragen sich all diese Strukturen.

2.1. Ordnung

2.1.a. Listen und Tabellen

In einer Liste gibt es nur endlich viele Einträge, in einer Tabelle nur endlich viele Zeilen und Spalten. In 1-dimensionalen Räumen lässt sich die Menge der Einträge in beide Richtungen unendlich weit fortsetzen und sie sind auch unendlich dicht (es gibt keine Nachbareinträge, sondern es sind immer unendlich viele Einträge dazwischen. Bei 2-dimensionalen Räumen gilt dasselbe für die Menge der Zeilen und Spalten.

2.2. Dimensionen

2.2.a. Komplexe Zahlen in mehreren Dimensionen

Wenn man die komplexen Zahlen nur in einer Dimension ordnet (zum Beispiel nur nach dem Betrag), gibt es an jeder Stelle unendlich viele komplexe Zahlen, die nicht geordnet sind (zum Beispiel gibt es unendlich viele komplexe Zahlen mit dem Betrag 1 und zwar alle, die in der komplexen Ebene am Einheitskreis liegen). Die Ordnung ist daher nicht eindeutig.

Wenn man die komplexen Zahlen in drei Dimensionen ordnet (zum Beispiel nach Realteil, Imaginärteil und Betrag) sind die komplexen Zahlen nicht vollständig, weil zu jedem Paar aus Realteil und Imaginärteil nur ein Betrag existiert, alle anderen Plätze in dieser Komponente sind daher leer.

2.2.b. Eindeutigkeit der Dimension

Wie wir im vorigen Beispiel gesehen haben, ist eine Menge nicht eindeutig geordnet, wenn man zu wenig Dimensionen verwendet und nicht vollständig, wenn man zu viele Dimensionen verwendet. Es gibt maximal eine Dimension, bei der sich das genau ausgeht.

Es gibt auch Mengen, die selbst in einer Dimension unvollständig sind (zum Beispiel eine Menge mit nur einem Element). Sie haben folglich die noch kleinere Dimension 0. Es gibt auch Mengen die immer uneindeutig sind, egal wie viele Dimensionen man einführt (zum Beispiel die Menge aller Polynomfunktionen). Sie haben folglich die noch höhere Dimension ∞.

2.4. Rechnen mit Räumen

2.4.a. Komplexe Zahlen mit Betrag 1

Die komplexen Zahlen werden in einer Dimension nach dem Winkel geordnet, wobei nach dem Winkel 2π die Achse wieder von vorne anfangen muss. Da die komplexe Multiplikation eine Winkeladdition und die komplexe Division eine Winkelsubtraktion zur Folge hat, und keine komplexen Zahlen mit dem gleichen Betrag und unterschiedlichen Winkeln existiert, ist die Aufgabe erfüllt.

2.4.b. Polynomfunktion

Eine Polynomfunktion kann allgemein in der Form $f(x) = a + bx + cx^2 + ... + zx^n$ geschrieben werden, wobei n beliebig groß werden kann. Wir müssen diese Funktionen daher in einem unendlichdimensionalen Raum darstellen. Die erste Koordinate wird nach der Größe der Zahl a, die zweite Koordinate nach der Größe der Zahl b und so weiter geordnet. Jedes Element hat in unendlich vielen Dimensionen den Wert 0, dennoch ist die Menge vollständig, weil es in jeder Dimension unendlich viele Elemente gibt.

2.5.a. Strukturen

Es lassen sich nur die Rechenarten übertragen, die man mit Vektoren durchführen kann: Addition, Multiplikation mit einem Skalar, Skalarprodukt, Norm etc. (nicht jedoch potenzieren, logarithmieren etc.).

2.5.b. Strukturerhaltende Abbildungen

Möchte man die Addition und/oder die Multiplikation erhalten, muss man in einer Dimension eine konstante Funktion f(x) = kx verwenden. Aus a + b = c folgt dann ka + kb = kc und aus de = g dke = kg.

Für höherdimensionale Räume funktioniert es mit jeder beliebigen Abbildungsmatrix. Aus $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ folgt $\begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ und aus $k \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ o \end{pmatrix}$ folgt $k \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & h \\ i & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ o \end{pmatrix}$

Das Skalarprodukt bleibt nur dann erhalten, wenn alle Beträge und Winkel erhalten bleiben (Diese kann man schließlich mittels $\sqrt{< v, v >}$ bzw. Vektor-Winkel-Formel aus dem Skalarprodukt ausrechnen). In einer Dimension funktioniert das daher nur mit der konstanten Funktion f(x) = x und der Spiegelung f(x) = -x. In höherdimensionalen Räumen funktioniert das mit allen Drehungen und deren Spiegelungen. (Drehmatrizen und Drehmatrizen mit entgegengesetztem Vorzeichen).

Für weitere Strukturen ist die Aufgabe 5.2.b. in einer eigenen Übersichtstabelle beantwortet. Diese bietet bereits einen Überblick und Ausblick auf künftige Lehrveranstaltungen.