Euklidische und unitäre Vektorräume

Bei euklidischen und unitären Vektorräumen ist neben der Addition und der Multiplikation auch das Skalarprodukt definiert, wobei in euklidischen Räumen nur reelle Zahlen und in unitären Räumen auch komplexe Zahlen vorkommen.

Skalarprodukte kommen in vielen Formeln vor: Man kann damit die Länge von Vektoren, den Winkel zwischen Vektoren, die von Vektoren eingeschlossenen Flächen, Volumen und Hypervolumen und vieles mehr berechnen. Die Tatsache, dass man in euklidischen Räumen vieles berechnen kann, bezeichnet man als „Reichheit der Struktur“.

Die Struktur in euklidischen und unitären Räumen ist immer mindestens genauso reich wie in Vektorräumen, weil die Vektorraumstruktur zur Definition eines euklidischen Raumes notwendig ist. Man kann euklidische und unitäre Räume auch als Sonderfall eines Vektorraums auffassen.

Gleichzeitig ist die Struktur auch reicher als in normierten Räumen (das sind Räume in denen eine Norm definiert ist), weil man mit jedem Skalarprodukt eine Norm berechnen kann (Wurzel aus dem Skalarprodukt mit sich selbst), nicht aber mit jeder Norm ein Skalarprodukt. Euklidische und unitäre Räume sind also auch ein Sonderfall eines normierten Vektorraums.

Der Vorteil von normierten Räumen und Vektorräumen ist, dass man sie leichter definieren kann, als euklidische Räume, weil man sich dort die Definition eines speziellen Skalarprodukts erspart.

1 Euklidische Räume

1.1 Allgemeines Skalarprodukt

Wenn in einem Vektorraum normale Vektoren im Anschauungsraum dargestellt werden, verwendet man normalerweise das Skalarprodukt, das ihr schon aus der Schule kennt, sodass die Fläche der Fläche im Anschauungsraum und der Winkel dem Winkel im Anschauungsraum entspricht. Um dieses von allgemeineren Skalarprodukten zu unterscheiden, wird es auch als „Standardskalarprodukt“ bezeichnet.

In einem Vektorraum können auch ganz andere Elemente dargestellt werden, betrachten wir beispielsweise den Raum der linearen Funktionen ax+b. Diese kann man ganz willkürlich auf verschiedene Arten ordnen. Man kann beispielsweise auf der einen Achse den Wert a und auf der anderen Achse den Wert b auftragen, sodass man das spezielle Skalarprodukt in diesem Raum mit der Formel $a^2 + b^2$ berechnen kann.

Für viele Anwendungen ist es jedoch sinnvoll, wenn das Skalarprodukt eine physikalische Bedeutung hat. Oft stellt die Fläche in einem Funktionenraum beispielsweise eine gewichtete Summe dar.

Beispiel zur gewichteten Summe

Wenn v(x) die Geschwindigkeit eines Autos auf einer Straße und B(x) das verbrauchte Benzin pro Geschwindigkeit pro Meter (ist von der Reibung des Straßenbelags an der Stelle x abhängig) angibt, ist die gewichtete Summe zwischen x_{Start} und x_{Ziel} der gesamte Benzinverbrauch G auf der Strecke.

Um diesen zu berechnen, muss man v(x) und B(x) multiplizieren und erhält damit eine Funktion, die an jeder Stelle den Benzinverbrauch des Autos angibt (Die Geschwindigkeit wurde an jeder Stelle mit dem Benzinverbrauch pro Geschwindigkeit pro Meter gewichtet). Dann zieht man die Funktionshöhe an jeder Stelle zwischen x_{Start} und x_{Ziel} zusammen, indem man die Fläche unter der Kurve (also das Integral zwischen x_{Start} und x_{Ziel}) berechnet.

Die Formel für den Benzinverbrauch ist folglich

$$G = \int_{x_{Start}}^{x_{Ziel}} v(x)B(x) \tag{1.1}$$

In einem Vektorraum, in dem die Formel für die gewichtete Summe als Skalarprodukt definiert ist, stellen die Funktionen v(x) und B(x) Vektoren dar, deren Schattenlänge multipliziert gerade G ergibt. Bei diesem Beispiel scheint es unnötig kompliziert, sich den Funktionenraum so zurechtzubiegen, dass der Benzinverbrauch eine grafische Bedeutung hat, aber für kompliziertere Anwendungen ist so eine grafische Anschauung gut, um nicht den Überblick zu verlieren.

Wenn man wissen möchte, welche Werte man auf den Achsen eines Vektorraumes auftragen muss, kann man sich mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens und beliebigen Funktionen in dem Raum eine Orthonormalbasis ausrechnen (Erklärung siehe Skriptum „Gram-Schmidt-Verfahren“).

Einschränkungen des allgemeinen Skalarprodukts

Die grafische Eigenschaft des Skalarprodukts, dass es eine Multiplikation der Schatten darstellt, führt zu grafischen Einschränkungen:

In der folgenden Auflistung sind u,v und w Vektoren, λ eine Zahl und <v|w> stellt das Skalarprodukt dar

- $\langle v|v\rangle \geq 0$: Das Quadrat des Schattens, muss immer größer gleich 0 sein (Schatten mit komplexer Länge gibt es nicht).
- $\langle v|v\rangle = 0$ wenn v = 0: Das Quadrat des Schattens auf sich selbst ist das Quadrat der Länge. Dieses kann nur dann 0 sein, wenn die Länge selber 0 ist.
- $\langle v|w\rangle = \langle w|v\rangle$: Das Produkt zweier Schatten ist kommutativ, da schon das normale Produkt kommutativ ist

- $\langle \lambda v|w\rangle = \langle v|\lambda w\rangle = \lambda\langle v|w\rangle$: Wenn einer der Vektoren um den Faktor λ verlängert wird, wird auch sein Schatten und folglich auch das Produkt der Schatten um den Faktor λ verlängert.
- $\langle v + u|w\rangle = \langle u|w\rangle + \langle v|w\rangle$: Der Schatten der Summe zweier Vektoren, entspricht der Summe der Schatten (der Schatten kann auch abgezogen werden).
- $\langle v|u + w\rangle = \langle v|w\rangle + \langle u|w\rangle$: Diese Einschränkung muss man nicht extra definieren, denn man kann diese mit dem Kommutativgesetz zur vorigen Aussage umdrehen.

1.2 Strukturerhaltende Abbildungen

Eine reiche Struktur führt dazu, dass es nur sehr wenige strukturerhaltende Abbildungen gibt. Das erkennt man gerade bei euklidischen Vektorräumen besonders gut: Da man mit dem Skalarprodukt Winkel berechnen kann, dürfen sich diese nicht verändern. Es sind daher höchstens Drehstreckungen strukturerhaltend. Da man mit dem Skalarprodukt auch die Norm definieren kann, dürfen die Vektoren ihre Länge nicht ändern. Das führt dazu, dass die Vektoren auch nicht mehr gestreckt oder gestaucht werden können. Es bleiben nur noch Drehspiegelungen über.

Reine Drehungen und Spiegelungen mit Cosinus- und Sinustermen sind noch relativ leicht zu erkennen (Erklärung siehe Skriptum „Räume und Abbildungen“). Wenn jedoch mehrere Drehungen kombiniert werden und/oder die Sinus- und Cosinusterme explizit ausgerechnet sind, geht das nicht so einfach.

Um herauszufinden, welche Eigenschaften die Matrizen dieser strukturerhaltenden Abbildungen erfüllen müssen, wollen wir das Skalarprodukt als Sonderfall eines Matrixprodukts auffassen. Damit man das Skalarprodukt mit den Rechenregeln einer Matrizenmultiplikation berechnen kann, muss man den ersten Vektor als Zeilenvektor und den zweiten Vektor als Spaltenvektor anschreiben.

$$< v|w >= (v_1, v_2)\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Der Zeilenvektor wird auch als Bra-Vektor <v| und der Spaltenvektor als Ket-Vektor |w> bezeichnet. Die Idee hinter dieser Schreib- und Sprechweise ist, dass man das Skalarprodukt aus zwei Bausteinen zusammensetzt, die zusammen ein Skalarprodukt <v|w> bzw. Bra-Ket (für das englische Wort bracket = Baustein) bilden. Lasst euch nicht davon verwirren, dass diese Zusammensetzung sprachlich und schriftlich schlampig ist (das c im Wort bracket wird beim Zusammensetzen verschluckt und der Strich in der Mitte wird beim auseinanderteilen verdoppelt). Wichtig ist bei dieser Zusammensetzung nur, dass es sich mathematisch genau zu einem Skalarprodukt zusammenfügt.

Damit eine Abbildung das Skalarprodukt erhält <a|b>=<f(a)|f(b)> muss die Änderung des Spaltenvektors genau die Änderung des Zeilenvektors ausgleichen und umgekehrt, das heißt, wenn man die Matrix auf einen Zeilenvektor anwendet, muss genau das inverse herauskommen, wie wenn man die Matrix auf einen Spaltenvektor anwendet ($f(a) = f^{-1}(b)$). Matrizen und Abbildungen für die das gilt, heißen

„orthogonal".

Die Funktion f(b) (Spaltenvektor mal Matrix) entspricht genau dem Vektor-Matrix-Produkt. Bei der Funktion f(a) (Zeilenvektor mal Matrix) wirken die Zeilen so, wie beim Vektor-Matrix-Produkt die Spalten. Folglich muss man bei der Matrix Zeilen- und Spaltenindex vertauschen, damit es zu einem Vektor-Matrix-Produkt wird. Beim Vektor ist der einzige Index nicht mehr ein Zeilenindex sondern ein Spaltenindex.

Das Vertauschen von Zeilen- und Spaltenindex bezeichnet man als „transponieren" bzw. A^T, wobei A die Matrix ist, die transponiert wird und T die Abkürzung für transponieren. Mit dieser Schreibweise kann man als Bedingung für die Orthogonalität einer Matrix $A^T = A^{-1}$ angeben.

Symmetrische Abbildungen

Im Allgemeinen wirken Matrizen auf Zeilenvektoren anders als auf Spaltenvektoren. Für das Skalarprodukt bedeutet das, dass ein Vektor am Anfang des Skalarprodukts anders als derselbe Vektor am Ende des Skalarprodukts abgebildet wird. Das kann natürlich unbefriedigend sein, weil es geometrisch keinen Unterschied zwischen Zeilen- und Spaltenvektoren gibt.

Es gibt jedoch auch Matrizen bei denen das Problem nicht auftritt: Sie wirken auf die Zeilenvektoren genau so wie auf die Spaltenvektoren. Dafür ist es notwendig, dass in den Zeilen genau dieselben Einträge, wie in den Spalten stehen, es gilt $A^T = A$. Diese Matrizen werden als „symmetrisch" bezeichnet, weil die Spiegelung entlang der Diagonale, bei der Zeilen- und Spaltenindex gleich groß sind (diese wird als Hauptdiagonale bezeichnet) die Einträge nicht verändern.

Wenn man mehrere symmetrische Matrizen multipliziert, ist die Matrix immer noch symmetrisch. Das liegt daran, dass nach der Matrizenmultiplikation im Index ij das Produkt der iten Zeile mit der jten Spalte steht. Im Index ji steht das Produkt der jten Zeile mit der iten Spalte. Da in der iten Zeile dasselbe, wie in der iten Spalte (und somit auch in der jten Zeile dasselbe wie in der jten Spalte) steht, müssen die Einträge ij und ji auch nach der Matrizenmultiplikation noch gleich sein.

Drehungen und Drehspiegelungen

Drehmatrizen und Drehspiegelungen sind immer symmetrisch. Das kann man bei Drehungen um eine Achse und Spiegelungen direkt sehen. Wenn man Drehungen um mehrere Achsen und Spiegelungen kombiniert, entspricht das der Matrizenmultiplikation dieser Drehungen, sodass die Matrix symmetrisch bleibt.

Orthogonal sind die Abbildungen im allgemeinen nicht: Da aufgrund der Symmetrie $A^T = A$ gilt, müsste, damit die Bedingung $A^T = A^{-1}$ stimmt, $A = A^{-1}$ sein und somit $AA = AA^{-1} = \mathbb{1}$ gelten. Das stimmt zwar für Spiegelungen und Drehungen um 180°, bei anderen Drehungen muss man jedoch den negativen Winkel in die Drehmatrix einsetzen um zurück zum Ausgangsvektor zu kommen.

Beim symmetrischen Sinus führt das zu keiner Änderung, beim antisymmetrischen Cosinus verändern die Terme jedoch ihr Vorzeichen. Das führt dazu, dass das Skalarprodukt manchmal das Vorzeichen umdreht (wenn eine ungerade Anzahl von Cosinustermen auftritt). Das bedeutet intuitiv, dass nach einer Drehung der Schatten nach hinten zeigen kann.

1.3 Projektionen

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man auch Untervektorräume mit weniger Dimensionen definieren (zum Beispiel eine Linie in einer Fläche, eine Fläche in einem Raum, eine Linie in einem Raum oder eine m-dimensionale Hyperfläche in einem n-dimensionalen Hypervolumen).

Im allgemeinen bilden Projektionen einen n-dimensionalen Raum auf einen m-dimensionalen Unterraum ab. Bei erneuter Anwendung der Projektion bleiben alle Vektoren innerhalb dieses m-dimensionalen Unterraums gleich. Ein wichtiger Spezialfall von Projektionen sind Orthogonalprojektionen, die jeden Vektor auf seinen Schatten abbilden.

Orthogonalprojektionen

Wenn man einen Vektor <v| mit Länge 1 und einen Vektor |w> multipliziert, erhält man die Länge des Schattens von |w> auf eine Linie in Richtung des Vektors <v|. Multiplikation der Zahl mit |v> (also einem Spaltenvektor, der genau die gleichen Einträge wie der Zeilenvektor |v> hat) ergibt einen Vektor mit der Richtung |v> und der Länge <v|w> (also der Länge des Schattens). Das entspricht dem auf diese Linie projezierten Vektor.

Insgesamt kann man die Projektion des Vektors w auf die Linie v mit der Formel |v><v|w> aufschreiben. |v><v| ist somit eine Matrix V, die jeden Vektor |w> auf eine Linie, die vom Vektor v aufgespannt wird, abbildet. (Das Bilden des Matrizenprodukts der beiden Vektoren ergibt das Tensorprodukt, weil der Spaltenvektor vor dem Zeilenvektor steht).

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} (v_1, v_2) = \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_2 v_1 & v_2^2 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

Wenn man die Projektionsmatrix zwei mal anwendet, ändert das nichts mehr, weil bereits jeder Vektor w auf den Vektor v projiziert wurde, folglich gilt in Matrixschreibweise $V^2 = V$ bzw. in Bra-Ket-Notation |v><v|v><v|=|v><v|. In Bra-Ket-Notation erkennt man, dass in der Mitte <v|v> (die Norm des Vektors zum Quadrat) steht und das ist laut Voraussetzung schon 1.

Spektralzerlegung

Die Spektralzerlegung entspricht der Teilung eines Vektors in seine Komponenten. Beispielsweise ist die Spektralzerlegung des Vektors (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1). Bei gewöhnlichen Vektoren erscheint einem das trivial, das ändert sich jedoch wenn in dem Vektorraum Funktionen oder andere komplexe Elemente eingetragen sind.

Um so eine Spektralzerlegung zu erhalten, muss man den Vektor |w> auf jeden der n Basisvektoren $|v_i>$ projizieren und die Projektionen addieren. Die allgemeine Formel für die Spektralzerlegung lautet daher

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i >< v_i|w > \tag{1.4}$$

2 Unitäre Räume

2.1 Komplexes Skalarprodukt

Wenn man im komplexen versucht, ein normales Skalarprodukt zu berechnen, wird man schnell an den Einschränkungen (speziell daran, dass das Skalarprodukt immer positiv ist) scheitern. Wenn man beispielsweise den Vektor (i,0) quadriert, bekommt man den Betrag -1. Das ist natürlich ein Problem, weil die Länge eines Vektors nicht negativ und schon gar nicht komplex sein kann.

Man kann jetzt auf die Idee kommen, dass man die komplexen Koordinaten wie zwei zusätzliche Koordinaten betrachtet (eine für den Realteil und eine für den Imaginärteil). Beim Imaginärteil muss natürlich der Faktor i wegfallen, damit das Skalarprodukt positiv bleibt. Um das zu erreichen, kann man einen Eintrag als komplex konjugiert definieren, denn -i mal i ist 1. Welchen Eintrag man als komplex konjugiert definiert, ist egal und wird daher auch in der Literatur nicht einheitlich gehandhabt.

Durch die Definition der komplexen Konjugation, werden zwar einige Eigenschaften aufgeweicht (das Skalarprodukt ist nicht mehr kommutativ, sondern man erhält durch Vertauschen das komplex konjugierte Ergebnis und die Multiplikation mit einer komplexen Zahl führt in einer der Koordinaten zur Multiplikation des Ergebnis mit dem komplex konjugierten) aber zumindest bleibt das reele Skalarprodukt der Speziellfall des komplexen Skalarprodukts für reelle Zahlen.

2.2 Strukturerhaltende Abbildungen

Beim komplexen Skalarprodukt muss man einen der beiden Vektoren (entweder den Zeilen- oder den Spaltenvektor) komplex konjugieren. Folglich genügt es nicht mehr, wenn man die Zeilen und Spalten der Matrix vertauscht, sondern man muss diese zusätzlich komplex konjugieren. Diesen Vorgang bezeichnet man als „adjungieren" bzw. A^+, wobei A die Matrix ist, die adjungiert wird und + das Zeichen für adjungieren. Damit eine Matrix das komplexe Skalarprodukt erhält, muss folglich $A^+ = A^{-1}$ gelten. Diese Matrizen bezeichnet man als unitäre Matrizen. Insbesondere ist die reelle orthogonale Matrix ein Spezialfall der unitären Matrix.

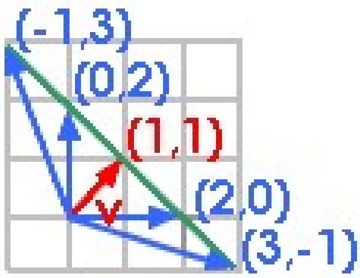
Es gibt auch im komplexen Matrizen, die auf Spaltenvektoren und komplex konjugierte Zeilenvektoren exakt gleich wirken. Dafür muss $A^+ = A$ gelten und man bezeichnet diese Matrizen als „hermitesch". Grafisch gesehen bedeutet das, dass die Vektoren entlang der reellen Achsen weiterhin beliebig gedreht werden dürfen. Die komplexen Achsen müssen jedoch gleich bleiben, gespiegelt oder um genau 180° gedreht werden. Jede andere Drehung würde dazu führen, dass sich die Einträge im adjungierten Vektor anders ändern, weil dort der Vektor in die andere Richtung gedreht werden würde.

2.3 Dualräume

Dualräume sind Räume die Elemente eines Vektorraumes auf komplexe Zahlen abbilden. Betrachten wir beispielsweise den Dualraum der den Vektor v=$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ auf die Zahl 2 abbildet.

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(w_1, w_2) = 2 \tag{2.1}$$

Dann sind in dem Raum alle Vektoren enthalten, für die gilt $w_1 + w_2 = 2$. Anschaulich betrachtet, sind das alle Vektoren, deren Schatten auf den Vektor v die Länge $\sqrt{2}$ hat. Wenn man einen Strich zeichnet, der $\sqrt{2}$ Einheiten vom Ursprung des Vektors v entfernt im rechten Winkel auf den Vektor v steht (Lichtstrahl, der das Ende des Schattens erzeugt), enden alle Vektoren des Dualraums, die beim Ursprung des Vektors v beginnen bei diesem Strich und alle Vektoren, die beim Ursprung des Vektors v beginnen und beim Strich enden, sind im Dualraum.



Dass der Strich genau beim Ende des Vektors v ist, liegt daran, dass der Vektor v selbst zufälligerweise auch im Dualraum liegt (Das Quadrat der Länge des Vektors ist ebenfalls 2).

Vollkommen analog kann man den Dualraum mit einem abstrakten Skalarprodukt berechnen. Betrachtet man beispielsweise alle Funktionen, die die Funktion f(x)=1 mit dem Skalarprodukt $\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ auf die Zahl 2 abbilden

$$\int_{-1}^{1} g(x)dx = 1 \tag{2.2}$$

Dann sind im Dualraum alle Funktionen enthalten, die zwischen den Werten -1 und 1 eine Fläche mit dem Flächeninhalt 1 unter der Kurve haben.

Der Dualraum des Dualraums ist der Bidualraum. Da das reelle Skalarprodukt kommutativ ist, und im komplexen einer der beiden Beiträge komplex konjugiert wird, ist das komplexe Skalarprodukt hermitesch (das heißt, durch Vertauschen wird das Ergebnis komplex konjugiert). Folglich führt der Bidualraum zum komplex konjugierten des ursprünglichen Vektors zurück.

3 Unendlichdimensionale Räume

Unendlichdimensionale Räume sind Räume, die von unendlich vielen Basisvektoren aufgespannt werden. Das heißt nicht zwangsläufig, dass es darin Elemente gibt, die von unendlich vielen Basisvektoren aufgespannt werden und somit zu einer unendlich langen Spektralzerlegung führen.

Betrachten wir beispielsweise den Raum der endlich langen Reihen, wobei die Basisvektoren die Reihen mit einem Index 1 und sonst lauter Indizes 0 sind. In diesem Raum kann jedes Element (z.B. die Reihe 1,2,3) durch eine endliche Spektralzerlegung dargestellt werden, nämlich für jedes Element der endlich langen Reihe eine Reihe in der dieses Element 1 und die anderen 0 sind mal der Größe des Elements (in unserem Beispiel ergibt 1 x 1,0,0 + 2 x 0,1,0 + 3 x 0,0,1 genau die Reihe 1,2,3). Da die Reihen in diesem Raum beliebig lang sein können, gibt es jedoch keine Menge von Basisvektoren, die alle Elemente erreichen.

Noch komplizierter sind Räume, in denen selbst die Elemente nicht durch eine endliche Spektralzerlegung dargestellt werden, beispielsweise die Menge der unendlichen Reihen. In diesem Raum kann jedes Element durch eine unendlich lange Spektralzerlegung dargestellt werden (z.B. das Element 1,2,3,... durch 1 x 1,0,0,... + 2 x 0,1,0... + 3 x 0,0,1,...+...). Immerhin kann man sie jedoch noch in einzelne, wenn auch unendlich viele, Dimensionen separieren. Deshalb nennt man sie separable Räume.

Wenn die Anzahl der Dimensionen jedoch überabzählbar unendlich wird, funktioniert das nicht mehr. Betrachten wir beispielsweise den Raum aller Funktionen. In diesem Raum kann man die Basis noch immer ähnlich wie bei den Reihen definieren (Jede Basisfunktion ist an einer Stelle 1 und an allen anderen Stellen 0). Wenn man die Spektralzerlegung aufschreiben möchte, hat man jedoch schon das Problem, wo man anfangen soll: Wenn man mit der Funktion, die an der Stelle 1 1 ist anfängt, überspringt man die Funktion, die an der Stelle 0,1 1 ist. Wenn man mit der Funktion, die an der Stelle 0,1 1 ist, anfängt, überspringt man die Funktion, die an der Stelle 0,01 1 ist und so weiter. Bei jeder weiteren Stelle hat man das Problem erneut.

Was schon geht, ist, dass man die Summe unendlich stark verdichtet, so dass sie zu einem Integral wird. Die Funktion würde dann zum Integral über die Funktion 1 (was der Aufsummierung eines Peaks mit Höhe 1 an jeder Stelle entspricht) und zwar df(x) (das bedeutet, dass jede Stelle mit dem jeweiligen Funktionswert multipliziert wird). $\int 1df(x)$ ist für jede beliebige Funktion f(x) wodurch das Ergebnis der Spektralzerlegung wieder stimmt. Das Integral über eine andere Zahl entspräche Basisvektoren mit einer anderen Länge und das Integral über eine Funktion g(x) entspräche unterschiedlich langen Basisvektoren, wobei die Funktionswerte der Funktion g(x) die Länge des Basisvektors mit Peak an dieser Stelle angibt. Da man die Basisvektoren mit einer dementsprechend anderen Zahl multipliziert, wird nach d$\frac{f(x)}{g(x)}$ integriert.

3.1 Operatoren

Operatoren sind das analogon zu linearen Abbildungen. Allerdings kann man sie im Gegensatz zu linearen Abbildungen nicht mehr unbedingt mit Matrizen (zumindest nicht mit endlichdimensionalen) darstellen.

Bei seperablen Räumen kann man sich noch mit unendlichgroßen Matrizen weiterhelfen. Betrachten wir beispielsweise auf dem seperablen Raum der unendlichlangen Reihen einen Operator, der von jeder Stelle die vorige Stelle abzieht, so kann man das mit der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... \\ -1 & 1 & 0 & ... \\ 0 & -1 & 1 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

darstellen.

Wenn man das jedoch verallgemeinert, und auf den Raum der Funktionen den Ableitungsoperator anwendet, geht das nicht mehr, weil dann die Matrixeinträge auch unendlich dicht beieinander stehen müssten. Dennoch ist der Operator weiterhin linear (wenn zwei Funktionen addiert oder multipliziert werden, werden auch ihre Steigungen addiert bzw. multipliziert).

3.2 Operatornorm

Die Operatornorm gibt die maximale Vergrößerung eines Vektors durch den Operator an, das heißt die Länge des Vektors nach Anwendung des Operators wird durch die Länge des Vektors vor der Anwendung dividiert und wenn das Ergebnis vom Vektor abhängt, nimmt man das größtmögliche Ergebnis

$$||O||_{Op} = sup\frac{||Ov||}{||v||} \tag{3.2}$$

In dieser Formel steht O für Operator und v für Vektor. Das Supremum (sup) gibt an, dass man den Vektor nehmen muss, für den das Ergebnis am größten ist und der Index op gibt an, dass es sich um die Operatornorm handelt..

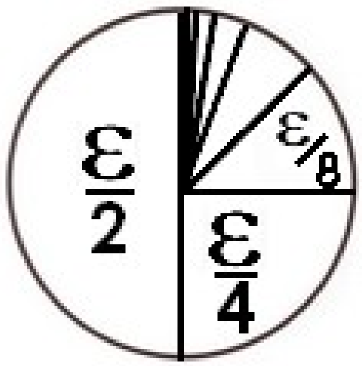
Dabei ist nicht garantiert, dass die Norm immer endlich bleibt. Betrachtet man beispielsweise den Operator, der den zweiten Vektoreintrag verdoppelt, den dritten verdreifacht und so weiter. Dann bleibt jeder Vektoreintrag endlich, aber die Norm wird dennoch ∞-fach so groß.

Genauso kann die Norm auch den Wert ∞ annehmen, wenn der zweite Eintrag mit -2, der dritte Eintrag mit -3 und so weiter multipliziert wird. Dann ist der Vektor zwar nachher -∞-fach so lang, durch den Betrag wird der Wert aber wieder positiv.

Man bezeichnet eine Operatornorm als beschränkt, wenn die Operatornorm nicht unendlich werden kann, das heißt wenn der Operator die Länge jedes Vektors nur um einen endlichen Faktor streckt.

Die beschränkten Operatoren sind gleichzeitig immer stetig, denn wenn man jeden Eintrag nur um einen beliebig kleinen Wert ändert, kann man auch die Operatornorm beliebig wenig ändern.

Möchte man beispielsweisweise die Operatornorm nur um den Wert ϵ ändern, zählt man beim ersten Eintrag $\frac{\epsilon}{2^2}$, beim zweiten $\frac{\epsilon}{4^2}$ beim dritten $\frac{\epsilon}{8^2}$ und so weiter zum Operator dazu. In der Norm steht dann $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} + ... = \epsilon$ mehr.



Die unbeschränkten Operatoren sind hingegen immer unstetig, denn egal wie klein der Faktor ist, den man dazuzählt, durch die Multiplikation mit ∞ wird die Norm dadurch immer um ∞ größer.

Auch die beschränkte Operatornorm hat manchmal überraschende Ergebnisse: Wenn der zweite Eintrag halbiert, der dritte gedrittelt und so weiter wird, ist der Nenner unendlichfach so groß wie der Zähler, sodass die Norm 0 wird, obwohl die Länge des Vektors nach Anwendung des Operators immer noch ∞ ist.

Ein weiterer ungewohneter Fall entsteht, wenn der erste Eintrag mit 0 und alle anderen mit 1 multipliziert werden. Dann ist die Operatornorm nämlich immer noch 1, weil der Eintrag im ersten Element meistens ∞-fach kleiner als die restliche ∞-lange Reihe ist. Die restliche Reihe kann zwar auch konvergieren, aber dann ist der Quotient kleiner als 1 und somit nicht das Supremum.

3.3 Isometrien

In unendlichdimensionalen Räumen gibt es Operatoren, die zwar das Skalarprodukt erhalten aber dennoch nicht orthogonal bzw. unitär sind. Diese Operatoren bezeichnet man als Isometrien.

Ein Beispiel für eine Isometrie ist ein Operator, der eine Null als erstes Element einfügt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... \\ 0 & 0 & 1 & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

Nach dem Anwenden des Operators ist das Skalarprodukt weiterhin die Summe aller Elemente. Allerdings gilt nicht mehr $A^T = A^{-1}$ weil bei der inversen Abbildung das erste Element verloren geht

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & ... \\ 1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 1 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

und dadurch auch eine andere Zahl im ersten Element stehen könnte.

4 Hilberträume

Hilberträume sind vollständige unendlichdimensionale Vektorräume mit Skalarprodukt. Man kann auch unvollständige unendlichdimensionale Vektorräume durch Hinzufügen von zusätzlichen Mitgliedern zu vollständigen Hilberträumen ergänzen. Dieses Vorgehen nennt man „vervollständigen".

Um den Vorgang des Vervollständigen zu verstehen, betrachten wir ihn zunächst einmal in einem endlichdimensionalen Raum. Wenn dort ein Raum unvollständig ist (zum Beispiel weil das Element (1,1) fehlt) kann man innerhalb des Raumes Vektoren so addieren, subtrahieren, mit einem Skalar multiplizieren, multiplizieren oder dividieren, dass man den Raum verlässt (z.B. kann man in unserem Beispiel die Elemente (1,0) und (0,1) addieren). Wenn der Raum vollständig ist, kommt man mit den im Vektorraum definierten Rechenarten nicht mehr aus dem Raum heraus.

Dabei muss man beachten, dass man manchmal auch unendlich viele Rechenschritte anwenden muss, um einen unvollständigen Raum zu verlassen. Betrachten wir den Raum der rationalen Zahlen: Diesen kann man beispielsweise verlassen, indem man die Stellen von π aufaddiert (3 + 0,1 + 0,04 + ...) und den Raum bei der irrationalen Zahl π verlässt. Da π unendlich viele Stellen hat, musste man jedoch unendlich viele Zahlen addieren, um den Raum zu verlassen.

Bei der Vervollständigung muss man jede Zahl, die man durch endlich oder unendlich viele Rechenschritte erreicht, in die Menge aufnehmen. Zu der Menge der rationalen Zahlen werden also alle irrationalen Zahlen dazu genommen, sodass man auf die Menge der reellen Zahlen kommt. In endlichdimensionalen Fällen ist dieser Vorgang sehr einfach, weil man nur entlang jeder Achse alle reellen Zahlen auftragen und daher gar nicht wirklich unendliche Reihen addieren muss.

Bei unendlichdimensionalen Räumen kommt man nicht mehr um unendlich lange Rechnungen zum Vervollständigen herum und das kann bei einigen Räumen (z.B. Funktionenräumen) zu einigen Schwierigkeiten führen.

Eine Schwierigkeit ist, dass nicht alle Reihen eindeutig gegen einen Wert konvergieren. Zum Beispiel die unendliche Summe 1-1+1-1... konvergiert entweder gegen 0 oder gegen 1, je nachdem ob man die Summe bei einer geraden oder ungeraden Stelle abbricht. In dem Fall muss man beide Möglichkeiten aufnehmen.

Eine andere Schwierigkeit wirkt sich speziell bei Funktionen aus: Es entstehen beim Vervollständigen Funktionen mit dem Integral 0, die dennoch von 0 verschieden sind.

Bei eindimensionalen Funktionen passiert das, wenn nur einzelne Werte ungleich 0 sind, sodass eine Seite der Fläche unterhalb der Kurve 0 und somit der Flächeninhalt ebenfalls 0 wird. Bei höherdimensionalen Funktionen genügt es, dass die Werte ungleich 0 so angeordnet sind, dass mindestens eine Seite jedes Gebietes 0 ist, sodass eine Seite des Hypervolumens und somit das ganze Hypervolumen unterhalb des Gebietes 0 ist.

Solche sogenannten „Funktionen vom Maß 0" führen dazu, dass das Integral nicht mehr beim Skalarprodukt verwendet werden kann, weil sonst das Skalarprodukt zweier Funktionen, die nicht überall 0 sind, trotzdem 0 werden. Da man das Integral oft für Skalarprodukte verwenden möchte, werden Funktionen vom Maß 0 beim Vervollständigen ausgenommen.

Um nachzuvollziehen, wie so eine Vervollständigung insgesamt ablaufen könnte, nehmen wir als Beispiel einen Raum, in dem zu Beginn nur die Funktion f(x) = 3x enthalten ist. Da man alle Elemente beliebig oft addieren darf, kommt man auch auf f(x) = 6x, f(x) = 9x und so weiter. Durch Subtraktion kommt man auf f(x) = 0, f(x) = -3x, f(x) = -6x und so weiter.

Durch Multiplikation mit einem Skalar kommt man beispielsweise auf f(x) = x (durch Multiplikation mit $\frac{1}{3}$, f(x) = 7,4x (durch Multiplikation mit $\frac{7{,}4}{3}$ und f(x) = πx durch Multiplikation mit $\frac{\pi}{3}$, also allgemein auf alle Funktionen f(x) = ax.

Durch Multiplikation der Elemente kommt man beispielsweise auf f(x) = ax^2 (Multiplikation von f(x) = ax und f(x) = x) oder auf jede andere Funktion ax^n durch Wiederholung der Multiplikation mit f(x) = x. Da man auch auf diese Funktionen die Addition anwenden kann, erhält man bereits jede beliebige Potenzreihe der Form ax + bx^2 + cx^3 + ...

Durch Division kommt man beispielsweise auf f(x) = a (Division von f(x) = ax durch f(x) = x), f(x) = $\frac{a}{x^n}$ (Division von f(x) = ax durch f(x) = x^{n+1}) und f(x) = $\frac{b}{cx^n}$ (Division von f(x) = bx durch f(x)=cx^{n+1}), wobei man durch das letzte Beispiel nichts Neues erreicht, weil $\frac{b}{c}$ auch a ergeben kann. Kombiniert mit der Addition erhält man somit alle Potenzreihen der Form f(x) = ... + ax + b + $\frac{c}{x}$ + ...

Das Vervollständigen mit unendlichen Reihen hat oft auch überraschende Effekte. Beispielsweise konvergiert die Reihe $\frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ an jeder Stelle x gegen e^x. Auf diese Art und Weise erreicht man sogar jede Funktion, die man beliebig oft ableiten kann. Grund dafür: siehe Skriptum „Taylorreihen".