Gram-Schmidt-Verfahren

2D-Fläche im 3D-Raum

Gegeben ist eine 2-dimensionale Fläche in einem 3-dimensionalen Raum. Man möchte Punkte auf dieser Fläche angeben. Das kann man natürlich mit 3-dimensionalen kartesischen Koordinaten machen. Da alle Punkte auf derselben Fläche liegen, ist das aber gar nicht notwendig, sondern man kann ein 2-dimensionales kartesisches Koordinatensystem auf der Fläche definieren und kommt so mit einer Koordinate weniger aus.

Dass das immer möglich ist, kann man sich leicht klar machen, indem man sich ein kariertes Blatt Papier vorstellt, wobei die Linien das kartesische Koordinatensystem darstellen. Man kann dieses Blatt Papier auf jede beliebig ausgerichtete Fläche legen und die Linien stellen stets ein 2-dimensionales Koordinatensystem auf dieser Fläche dar.

Sie erfüllen dabei stets zwei Bedingungen:

- Die Linien stehen alle im rechten Winkel aufeinander (Orthogonalität)
- Die Abstände zwischen den Linien sind gleich groß (Normierung)

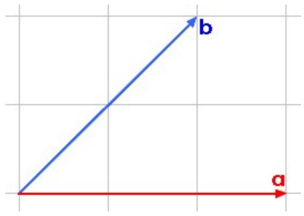
Man spricht deshalb auch von einem Orthonormalsystem.

Beim Gram-Schmidt-Verfahren versucht man ein solches Orthonormalsystem zu einer vorgegebenen Fläche zu finden.

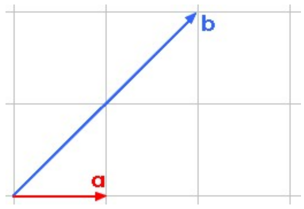
Beispiel

Eine 2-dimensionale Fläche wird im 3-dimensionalen Raum von den Koordinaten $\vec{a}$=(0,3,0) und $\vec{b}$=(2,2,0) aufgespannt.

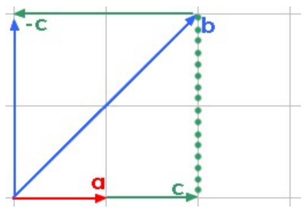
Finde mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahren ein Orthonormalsystem auf dieser Fläche!



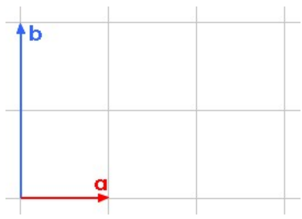
Grafische Darstellung der Ausgangslage.
Die Vektoren sind unterschiedlich lang und stehen nicht im rechten Winkel aufeinander.



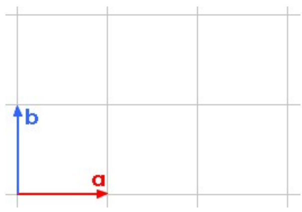
Schritt 1: Normieren des Vektors $\vec{a}$.
Damit der Vektor $\vec{a}$ die Länge 1 hat, muss man ihn durch seinen Betrag dividieren. Wir erhalten (0,3,0):3=(0,1,0).



Schritt 2: Orthogonalisieren des Vektors $\vec{b}$ bezüglich $\vec{a}$.
Damit der Vektor $\vec{b}$ orthogonal auf den Vektor $\vec{a}$ steht, muss man den Vektor $\vec{c}$ davon abziehen. Dieser Vektor entsprcht dem Schatten von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$, man erhält die Länge von $\vec{c}$ also indem man das Skalarprodukt zwischen $\vec{b}$ und dem normierten Vektor $\vec{a}$ bildet. Wir erhalten (2,2,0)(0,1,0)=2.



Um die Koordinaten von $\vec{c}$ zu erhalten, muss man die Länge mit der Richtung (normierter Vektor $\vec{a}$) multiplizieren. Wir erhalten 2(0,1,0)=(0,2,0). Subtraktion des Vektors $\vec{c}$ von $\vec{b}$ ergibt (2,2,0)-(0,2,0)=(2,0,0).



Schritt 3: Normieren des Vektors $\vec{b}$.
Zu guter Letzt müssen wir noch den Vektor $\vec{b}$ normieren. Wir erhalten (2,0,0):2=(1,0,0). Jetzt bilden $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Orthonormalsystem.

Zur Probe kann man überprüfen, ob alle Vektoren orthogonal (Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist 0) und normal (Der Betrag von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist 1) sind.

Dass in unserem Beispiel genau die Standardbasis herauskommt, liegt an der Angabe: Darin war unsere Ebene bereits eben (die z-Koordinate war 0), damit der Vorgang im Skriptum geometrisch dargestellt werden kann. Außerdem ist der Vektor $\vec{a}$ genau auf der y-Achse gelegen. (Wenn wir beispielsweise mit dem Vektor $\vec{b}$ begonnen hätten, der im 45°-Winkel zur y-Achse liegt und den Vektor $\vec{a}$ bezüglich $\vec{b}$ orthogonalisiert hätten, wäre das Koordinatensystem um 45° gedreht gewesen).

In unserer Anschauung mit dem karierten Papier bedeutet das, dass dieses um 45° gedreht auf der Ebene liegt. Das Papier kann auf jeder Ebene mit jeder beliebigen Drehung liegen, das bedeutet, dass es zu jeder Ebene unendlich viele mögliche

Orthonormalsysteme gibt.

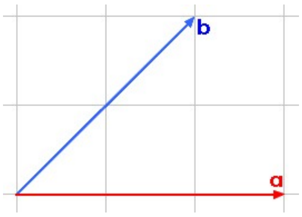
Verallgemeinerung auf mehr Dimensionen

Analog zu den Koordinaten einer 2-dimensionalen Fläche, die von 2 Vektoren im 3-dimensionalen Raum aufgespannt wird, kann man auch die Koordinaten einer m-dimensionalen Hyperfläche, die von m Vektoren im n-dimensionalen Hyperraum aufgespannt wird, berechnen. Wozu man mehr als 3 Dimensionen benötigt, wird im Abschnitt Verallgemeinerung auf abstraktere Räume klar.

Das Verfahren der Normierung und der Orthogonalisierung ist ganz analog wie bei den 2-dimensionalen Flächen im 3-dimensionalen Raum. Der einzige Unterschied ist, dass man die Vektoren bezüglich aller bereits ausgerechneter Koordinaten orthogonalisieren muss. Zum Beispiel ist der Vorgang für einen 3-dimensionalen Raum, der in einem höherdimensionalen Hyperraum aufgespannt ist, so:

1. Normieren von $\vec{c}$
2. Orthogonalisieren von $\vec{b}$ bezüglich $\vec{c}$
3. Normieren von $\vec{b}$
4. Orthogonalisieren von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{c}$
5. Orthogonalisieren von $\vec{a}$ bezüglich $\vec{b}$
6. Normieren von $\vec{a}$

Den ersten Vektor muss man daher 0 mal orthogonalisieren, den zweiten 1 mal und den dritten 2 mal. Den nten Vektor müsste man n-1 mal orthogonalisieren.



Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in dieser Abbildung sind schon bezüglich dem Vektor $\vec{c}$, der orthogonal aus dem Skriptum herausragt, normal. Damit das System zur Gänze orthogonal ist, muss man auch noch den Vektor $\vec{a}$ bezüglich $\vec{b}$ orthogonalisieren.

Bei der Probe, prüft man das Skalarprodukt jeder Kombination: Es gilt $\vec{a}\vec{c} = 0$, $\vec{b}\vec{c} = 0$, $\vec{b}\vec{a} = 0$. (In der obenstehenden Grafik ist nur die letzte Bedingung nicht erfüllt.) Für n Dimensionen müsste man also (n-1)! Skalarprodukte überprüfen.

Verallgemeinerung auf abstraktere Räume

In der Mathematik ist es oft praktisch, mathematische Zusammenhänge, die physikalisch nichts mit Dimensionen zu tun haben, trotzdem als n-dimensionale Räume darzustellen. Beispielsweise werden die komplexen Zahlen ai+b in der Gaußschen Zahlenebene so dargestellt, dass a auf die y-Achse und b auf die x-Achse aufgetragen wird.

Dass die imaginäre Achse normal auf die reelle Achse steht ist vollkommen willkürlich und hat nichts mit der physikalischen Bedeutung einer negativen Wurzel zu tun. Dennoch erleichtert diese Darstellung die Anschauung des Potenzierens und Wurzelziehens komplexer Zahlen.

Genauso willkürlich kann man den Raum der linearen Funktionen ax+b so darstellen, dass a auf der y-Achse und b auf der x-Achse aufgetragen wird. Den Raum der quadratischen Polynome $cx^2 + ax + b$ kann man so darstellen, dass man c auf der z-Achse aufträgt. Man kann sich also den Raum der linearen Funktionen als 2-dimensionale Ebene im Raum der quadratischen Funktionen darstellen.

Auch für solche Ebenen kann man das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden. Dazu wird willkürlich festgelegt, wie die Ebene dargestellt wird, zum Beispiel haben wir für den Raum der linearen Funktionen vorhin festgelegt, dass die Steigung normal auf den Schnittpunkt der Funktion mit der y-Achse ist. Das bedeutet, dass das Skalarprodukt aus Steigung und Schnittpunkt 0 sein muss. Ein Skalarprodukt, dass diese Bedingung erfüllt, wäre zum Beispiel $k_1 k_2 + d_1 d_2$. Das hat noch Ähnlichkeiten mit dem Standardskalarprodukt.

Wenn man jedoch den Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse ($x = -\frac{k}{d}$) normal auf den Schnittpunkt mit der y-Achse aufträgt, wäre das Skalarprodukt $\frac{k_1 k_2}{d_1 d_2} + d_1 d_2$. Man merkt, dass das Skalarprodukt keine Ähnlichkeit mit dem Standardskalarprodukt haben muss.

Da dieses Skalarprodukt willkürlich festgelegt wird, muss es in der Angabe vorgegeben werden. Mit diesem Skalarprodukt kann man das Gram-Schmidt-Verfahren analog zu den normalen Räumen ausführen (schließlich werden sie auch analog zu den normalen Räumen dargestellt). Jetzt wird auch klar, wieso die Verallgemeinerung des Gram-Schmidt-Verfahrens auf mehr als 3 Dimensionen Sinn macht: Räume mit mehr als 3 Variablen können durchaus als höherdimensionale Räume dargestellt werden.

Beispiel

Gegeben ist der Raum der reelen Polynome $a + bx + cx^2 + dx^3 + ...$ der von den Funktionen 1,x,x^2,x^3,... aufgespannt wird. Das Skalarprodukt lautet $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

Bei solchen Beispielen sollte man keine Zeit damit verschwenden, zu versuchen sich das vorzustellen, sondern einfach nach Schema F losrechnen. Wir beginnen also damit, den ersten Vektor (in unserem Fall eine Funktion) die den Raum aufspannt durch Division durch den Betrag zu normieren.

Dabei kommt gleich die erste Falle, denn der Betrag ist durch das Skalarprodukt definiert: Der Betrag ist die Wurzel aus dem Skalarprodukt mit sich selbst $|a| = \sqrt{< a, a >}$. Diese Definition ist anschaulich klar: Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist der Schatten, des Vektors $\vec{a}$ auf $\vec{b}$ mal der Länge des Vektors $\vec{b}$. Das Skalarprodukt von $\vec{a}$ und $\vec{a}$ ist daher der Schatten des Vektors $\vec{a}$ auf $\vec{a}$ (also die Länge von $\vec{a}$) mal der Länge des Vektors $\vec{a}$ (also insgesamt die Länge des Vektors $\vec{a}$ zum Quadrat). Um die Länge des Vektors $\vec{a}$ zu erhalten, muss man also nur noch die Wurzel ziehen.

Wir setzen also ins Skalarprodukt $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$ für f(x) und g(x) unsere erste Funktion (1) ein und erhalten $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} 1dx = \frac{1}{2}(1-(-1)) = 1$. Ziehen der Wurzel ergibt den Betrag (1) und Division unseres ersten Vektors (1) durch den Betrag (1) ergibt den ersten Vektor des Orthonormalsystems (1).

Unser zweiter Vektor lautet x. Diesen müssen wir zuerst bezüglich 1 orthogonalisieren. Wir nehmen also das Skalarprodukt von 1 und x, um die Länge des Schattens von 1 auf x auszurechnen: $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{2})) = 0$. Da das Skalarprodukt 0 ist, wissen wir, dass x bereits orthogonal auf 1 ist. (Die Länge des Schattens von x auf 1 ist 0 und wenn man den 0-Vektor abzieht, verändert sich die Funktion nicht.

Der nächste Schritt ist das normieren des Vektors x. Einsetzen des Vektors x in das Skalarprodukt ergibt $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2dx = \frac{1}{2}(\frac{1}{3}-(-\frac{1}{3})) = \frac{1}{3}$. Wurzelziehen ergibt $\frac{1}{\sqrt{3}}$ und Division durch den Betrag den zweiten Vektor im Orthogonalsystem $\sqrt{3}x$.

Auf diese Art und Weise kann man weitermachen und beliebig viele Orthonormalvektoren bestimmen. Da es sich in dem Fall um einen unendlichdimensionalen Raum handelt, hat man nie alle Vektoren bestimmt und kann somit nie den gesamten Raum aufspannen. Dennoch kann man jedes Element des Raumes mit endlich vielen Koordinaten angeben. Wenn man also die Koordinaten eines Punktes in diesem Raum angeben möchte, kann man die Orthonormalbasis so lange vergrößern, bis der Punkt erreicht wird und ist nach einer endlichen Zeit fertig.

Alle Angaben in diesem Skriptum sind ohne Gewähr. Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern.