Lineare Gleichungssysteme lösen

Erste Einblicke in das Lösen linearer Gleichungssysteme (Einsetzungsverfahren, Gleichsetzungsverfahren und Eliminationsverfahren) habt ihr schon in der Schule bekommen. In der Uni erfahrt ihr weitere Lösungsmöglichkeiten, mit denen ihr lineare Gleichungssysteme noch effizienter lösen könnt.

1 Matrizennotation

Beim Umformen eines Gleichungssystems könnt ihr euch viel Schreibarbeit ersparen, wenn ihr nicht jedes mal alle Unbekannten und alle Pluszeichen mitschleppt, sondern die relevanten Zahlen in eine Tabelle, eine sogenannte Matrix schreibt. Beispielsweise wird das Gleichungssystem

$$7x - 3y = 4 \tag{1.1}$$
$$4y = 4 \tag{1.2}$$

in Matrizennotation zu

$$\left.\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \end{array}\right.$$

Beachtet, dass in der ersten Zeile das Minus zu einem Vorzeichenminus wurde (das ist notwendig, damit man weiß, dass die weggelassene Rechenart immer ein Plus ist) und dass in der zweiten Zeile die nicht vorhandene Unbekannte x durch einen Nuller ersetzt wurde (das ist notwendig, damit man nicht mit den Unbekannten durcheinander kommt).

Nachdem ihr das Gleichungssystem zu einer Matrix umgeformt habt, könnt ihr alle Umformungen machen, die ihr von der Schule bereits gewohnt seid: Ihr könnt jede Gleichung mit beliebigen Zahlen multiplizieren (das ist in Matrizennotation die Multiplikation von Zeilen), ihr könnt verschiedene Gleichungen addieren und subtrahieren (das entspricht der Addition und Subtraktion beliebiger Zeilen) und ihr könnt alle Gleichungen in beliebiger Reihenfolge anschreiben (das entspricht dem Vertauschen der Zeilen).

Oft sind die Beispiele so gestellt, dass sich eine bestimmte Umformung geradezu anbietet. Beispielsweise bietet es sich bei unserem Gleichungssystem an, die unterste Zeile durch 4 zu dividieren, weil alle Zahlen durch 4 teilbar sind. Man erhält die Tabelle

$$\begin{array}{cc|c} 7 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}$$

wodurch der y-Wert bereits bestimmt ist, denn die zweite Zeile bedeutet nichts anderes als y=1.

An dieser Stelle kann man sich aussuchen, ob man das Einsetzungsverfahren (bei Matrizen heißt das Gauß-Algorithmus) oder das Eliminationsverfahren (bei Matrizen heißt das Gauß-Jordan-Algorithmus) verwendet.

Gauß-Algorithmus (Einsetzungsverfahren)

Beim Einsetzungsverfahren, setzt man für y=1 ein und zieht die dadurch erhaltenen Zahlen von der Gleichung ab, damit die Zahlen alle auf der selben Seite der Gleichung stehen. In Matrizennotation bedeutet das, dass man die y-Spalte mit 1 multipliziert und von der Zahlenspalte abzieht, um eine Spalte zu eliminieren. Man erhält

$$\begin{array}{c|c} 7 & 7 \\ 0 & 0 \end{array}$$

die untere Zeile kann man auch weglassen, denn die sagt nichts anderes aus, als 0=0. Die obere Zeile kann man durch 7 dividieren und erhält damit die zweite Unbekannte x=1.

Gauß-Jordan-Algorithmus (Eliminationsverfahren)

Beim Eliminationsverfahren versucht man die Gleichungen so umzuformen, dass nur noch eine Unbekannte pro Gleichung vorkommt. Beispielsweise kann man die untere Gleichung mit 3 Multiplizieren, sodass man durch Addition der Zeilen eine Gleichung erhält, in der nur die x-Werte vorkommen:

$$\begin{array}{cc|c} 7 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}$$

Wieder kann man durch Division durch 7 den x-Wert direkt aus der Tabelle ablesen.

Man kann sich bei jedem Gleichungssystem aussuchen, ob man es lieber mit dem Gauß-Algorithmus oder dem Gauß-Jordan-Algorithmus lösen möchte. Welches Verfahren einfacher ist, ist Geschmackssache und es führen beide Algorithmen auf alle richtigen Lösungen.

Matrizennotation nach Schema lösen

Die meisten Beispiele sind so gestellt, dass eine bestimmte Umformung besonders leicht ist. Wenn das jedoch nicht der Fall ist, oder wenn man die leichte Umformung nicht findet, kann man das lineare Gleichungssystem auch nach Schema lösen. Dafür sucht man sich eine beliebige Zahl aus, die man eliminieren möchte, zum Beispiel den ersten Eintrag a_{11}.

$$\left.\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right.$$

Die Zeile, in der der Eintrag steht, multipliziert man mit einer beliebigen Zahl in der gleichen Spalte, in unserem Beispiel kann man nur die Zahl a_{21} verwenden. Die Zeile in der die Zahl a_{21} steht, multipliziert man mit a_{11}. Dadurch erreicht man, dass zwei gleiche Einträge in der selben Spalte stehen, die man durch Subtraktion der Gleichungen eliminieren kann

$$\left.\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{21} & a_{12}a_{21} & b_1a_{21} \\ a_{11}a_{21} & a_{11}a_{22} & a_{11}b_2 \end{array}\right.$$

Dann sucht man sich die nächste Zahl, die man eliminieren möchte aus und eliminiert sie nach demselben System.

Wenn man den Gauß-Jordan-Algorithmus anwenden möchte, macht man das solange bis in jeder Zeile nur noch ein Eintrag steht. Division durch diesen liefert die Ergebnisse für die Unbekannten.

Wenn man den Gauß-Algorithmus anwenden möchte, macht man das so lange bis in einer beliebigen Zeile nur noch eine Unbekannte steht. Division durch diese liefert das Ergebnis für eine Unbekannte und eine kleinere Matrix. Mit dieser Matrix macht man weiter, bis man alle Unbekannten erhalten und alle Zeilen und Spalten der Matrix eliminiert hat.

2 Cramer'sche Regel

Da man jedes beliebige Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus oder des Gauß-Jordan-Algorithmus nach Schema lösen kann, könnte man auf die Idee kommen, das allgemeinstmögliche Gleichungssystem in das Schema einzusetzen und es so lange umzuformen, bis man für jede Unbekannte eine allgemeine Gleichung hat. Durch Einsetzen in diese Gleichung kann man jedes Gleichungssystem schnell lösen.

Ganz so einfach geht das nicht, denn ein beliebiges Gleichungssystem kann auch beliebig viele Unbekannte haben und dadurch muss man beliebig oft umformen.

Was aber schon geht, ist, eine allgemeine Gleichung für ein System mit 2 Unbekannten, eine allgemeine Gleichung für ein System mit 3 Unbekannten und so weiter aufzustellen.

Betrachten wir zunächst einmal ein allgemeines Gleichungssystem mit 2 Unbekannten

$$\left.\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right.$$

Umformung der Matrix mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus führt auf

$$\left.\begin{array}{cc} a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21} \end{array}\right| \begin{array}{c} b_1a_{22}-b_2a_{21} \\ a_{11}b_2-a_{12}b_1 \end{array}$$

Man erkennt, dass auf der linken Seite in jeder Zeile die gleichen Terme stehen. Die Zahl, die man durch Einsetzen der Werte in diesen Term erhält, wird Determinante der Matrix a genannt.

Auf der rechten Seite stehen sehr ähnliche Terme. Man erhält sie, wenn man die Determinante jener Matrix berechnet, bei der statt der Spalte, in der die Unbekannte steht, die andere Seite der Gleichung eingesetzt ist. Im folgenden wird die Matrix a, bei der die erste Spalte ausgetauscht wurde, als a_1, und die Matrix a, bei der die zweite Spalte ausgetauscht wurde als a_2 bezeichnet.

$$\left.\begin{array}{cc} det(a) & 0 \\ 0 & det(a) \end{array}\right| \begin{array}{c} det(a_1) \\ det(a_2) \end{array}$$

Mit Hilfe der Determinanten, kann man schnell erkennen, ob ein Gleichungssystem lösbar ist: Wenn die Determinante von a 0 ist, ergeben sich die Gleichungen 0x=$det(a_1)$ und 0y=$det(a_2)$ mit zwei Zahlen $det(a_1)$ und $det(a_2)$ Das bedeutet, dass das Gleichungssystem keine Lösungen hat. Wenn zusätzlich die Determinante von a_1 0 ist, ergibt sich die Gleichung 0x=0 , das bedeutet, dass das Gleichungssystem jedes x als Lösung hat. Wenn zusätzlich die Determinante von a_2 0 ist, ergibt sich die Gleichung 0y=0, das bedeutet, dass das Gleichungssystem jedes y als Lösung hat.

Wenn keine der Determinanten 0 ist, kann man den Gauß-Jordan-Algorithmus wie gewohnt beenden und erhält damit die Lösungen

$$x = \frac{det(a_1)}{det(a)} = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (2.1)$$

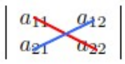
$$y = \frac{det(a_2)}{det(a)} = \frac{a_{11}b_2-a_{12}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \qquad (2.2)$$

Als nächstes wollen wir ein Gleichungssystem mit n Unbekannten (x_1 bis x_n) betrachten. Um irgendeine Unbekannte x_i zu berechnen, muss man bei einer der Gleichungen (wir nehmen willkürlich die Gleichung in der i-ten Zeile, man könnte jedoch auch jede andere Zeile verwenden) alle Unbekannten außer x_i eliminieren. Dazu multipliziert man die Gleichung mit Vorfaktoren anderer Unbekannter (Spaltenindex $\neq$ i) aus der linken Seite einer anderen Gleichung und zieht diese von der anderen Gleichung ab.

Das führt dazu, dass alle Vorfaktoren außer jenem in der i-ten Spalte 0 werden. Der Vorfaktor in der i-ten Spalte kommt gemeinsam mit anderen Vorfaktoren in die ite Spalte. Wie diese Gleichung aussieht, ist immer anders. Sie wird jedoch jedes mal Determinante genannt.

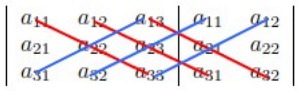
2x2-Matrix

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$



3x3-Matrix

$b_{11}b_{22}b_{33} + b_{21}b_{32}b_{13} + b_{31}b_{12}b_{23}$
$-b_{31}b_{22}b_{13} - b_{11}b_{32}b_{23} - b_{21}b_{12}b_{33}$



In dieser Tabelle sind links die Formeln für die Determinanten einer 2x2-Matrix und einer 3x3-Matrix eingezeichnet. Rechts ist jeweils ein grafisches Merkschema. Entlang der Linien wird multipliziert, die roten Linien werden addiert, die blauen Linien werden subtrahiert.

Die Zahl b_i wird mit denselben Vorfaktoren (Spaltenindex $\neq$ i) multipliziert wie die Zahl a_{ii}, schließlich wird immer die ganze Gleichung multipliziert. Beim Addieren und Subtrahieren anderer Gleichungen wird in der i-ten Spalte immer ein Vorfaktor mit Spaltenindex i abgezogen. In der Ergebnisspalte wird stattdessen das Ergebnis derselben Zeile abgezogen.

Man erkennt, dass die Gleichung rechts, der Gleichung links ähnelt, abgesehen davon, dass statt eines Vorfaktors aus der i-ten Spalte immer das Ergebnis derselben Zeile verwendet wird. Wenn man die i-te Spalte mit der Ergebniszeile austauscht und von der resultierenden Matrix die Determinante nimmt, hat man daher genau die Gleichung auf der rechten Seite.

Man erhält allgemein die Gleichung

$$det(a)x_i = det(a_i) \tag{2.3}$$

Die restlichen Überlegungen sind analog wie bei 2 Matrizen: Wenn die Determinante von a 0 ist, ist das Gleichungssystem nicht lösbar, wenn zusätzlich die Determinante von a_i 0 ist, ist jedes x_i eine Lösung und in allen anderen Fällen erhält man x_i durch Division der Gleichung 2.3. durch die Determinante von a

$$x_i = \frac{det(a_i)}{det(a)} \tag{2.4}$$

3 Laplace'scher Entwicklungssatz

Nachdem wir die Cramer'schen Regel mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus aufgestellt haben versuchen wir dasselbe mit dem Gauß-Algorithmus. Wir beginnen wieder zum Einstieg mit einem allgemeinen 2x2-Gleichungssystem und berechnen eine beliebige Unbekannte (zum Beispiel x).

$$\begin{array}{cc|c} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 & a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \\ a_{12}a_{21} & a_{12}a_{22} & a_{12}b_2 \end{array}$$

Die eine Zeile, in der wir die Unbekannte berechnet haben, haben wir genauso behandelt, wie vorher beim Gauß-Algorithmus. Dort kann man also wie vorher die

Determinanten einsetzen. Die Umformungen in den anderen Zeilen haben wir nur gemacht, um uns beim Addieren der Gleichungen leichter zu tun. Diese Umformungen kann man wieder rückgängig machen, sodass die anderen Zeilen wie ursprünglich dastehen.

$$\left.\begin{matrix} det(a) & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}\,\right|\,\begin{matrix} det(a_1) \\ b_2 \end{matrix}$$

Jetzt kann man eine Zeile und eine Spalte wie mit dem Gauß-Algorithmus gewohnt eliminieren. Man erhält ein kleineres Gleichungssystem, in dem die i-te Spalte und die i-te Zeile des Gleichungssystems verschwindet. In unserem Beispiel erhält man dadurch eine direkte Formel für die Determinante, in allen Gleichungssystemen mit mehr Unbekannten, kann man die Formel für die Determinante mit Hilfe der Berechnung kleinerer Determinanten berechnen.

Betrachten wir beispielsweise ein Gleichungssystem mit drei Unbekannten, dann kann man die x-Koordinate in jeder der drei Zeilen eliminieren und die Determinante der 3x3-Matrix durch drei 2x2-Matrizen ausdrücken

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \tag{3.1}$$

Insgesamt erkennt man, dass nach der Reihe alle Vorfaktoren einer beliebigen Spalte mit der Determinante jener Matrix multipliziert wird, bei der die Spalte und die Zeile des Vorfaktors fehlt. Am besten wählt man eine Spalte, in der viele Nullen stehen, sodass man möglichst wenige Determinanten berechnen muss. Das Vorzeichen ist abwechselnd positiv und negativ. Die allgemeine Formel lautet daher

$$det(a) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j} det(a_{ij}) \tag{3.2}$$

wobei mit a_{ij} die Determinante, bei der die i-te Zeile und die j-te Spalte fehlt, gemeint ist. Das Summensymbol hat im Index nur ein i, das bedeutet, dass nur über die Zeilen (mit Index i) summiert wird und man bei den Spalten einen beliebigen (jedoch einheitlichen, weil überall j steht) Index verwenden kann.

Der Faktor $(-1)^{i+j}$ sagt aus, dass sich die Vorzeichen abwechseln, denn -1 hoch einer ungeraden Zahl ist -1 und -1 hoch einer geraden Zahl ist 1. Da das i immer eins höher wird und das j gleich bleibt, wechseln sich die Vorfaktoren 1 und -1 ab. Das Dazuaddieren von j in der Potenz ist deshalb notwendig, weil ungerade Spalten mit einem positiven und gerade Spalten mit einem negativen Vorzeichen anfangen.

Beim Lösen eines Gleichungssystems mit Determinanten kann man sich nicht mehr aussuchen, ob man lieber die Cramer'sche Regel oder den Laplace'schen Entwicklungssatz verwendet, denn für große Matrizen ist die Formel für die Determinante nicht bekannt. Das bedeutet, dass man diese mit Hilfe des Laplace'schen Entwicklungssatz zumindest so lange auf eine kleinere Determinante zurückführen muss, bis man eine Matrix hat, deren Determinante man kennt. Dabei ist es mitunter notwendig, dass man aus den in der Formel vorkommenden Unterdeterminanten weitere Unterdeterminanten erzeugen muss. Erst dann kann man die Determinanten in die Cramer'sche Regel einsetzen.

4 Grafische Anschauung

Die Grafische Anschauung hat nicht unbedingt etwas mit der physikalischen Realität zu tun, dennoch kann es hilfreich sein, sich das Gleichungssystem grafisch vorzustellen, damit man weiß, was man tut.

Wenn man beispielsweise die Zahl der Äpfel mit der Zahl der Birnen vergleicht, hat das nichts mit einem zweidimensionalen Raum zu tun. Man kann aber dennoch die Zahl der Äpfel auf der x-Achse und die Zahl der Birnen auf der y-Achse auftragen und so eine Intuition für den Vorgang bekommen.

1D-Gleichungssystem

Man kann sich die Funktion ax als Gerade vorstellen, deren Steigung entlang der x-Achse a ist. Die Gleichung ax=b gibt dann an, bei welchem x-Wert die Funktion die Höhe b hat.

Wenn a=0 gilt, hat die Gerade keine Steigung und kann daher keinen Wert b≠0 erreichen. Das Gleichungssystem 0x=b hat keine Lösung. Wenn zusätzlich b=0 gilt, ist die Gleichung für jedes beliebige x erfüllt, denn die Gerade hat an jeder Stelle den Wert 0. Das Gleichungssystem 0x=0 hat unendlich viele Lösungen. Falls a≠0 und b≠0 gilt, kann man die Lösung durch Division durch b erhalten. Die allgemeine Lösung ist folglich $x = \frac{b}{a}$

Ein Vergleich mit den Eigenschaften der Determinanten

- $det(a) = 0 \Rightarrow$ Gleichungssystem hat keine Lösung
- $det(a_1) = 0, det(a) = 0 \Rightarrow$ Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen
- $x = \frac{det(a)}{det(a_1)}$

ergibt $det(a) = a$ und $det(a_1) = det(b) = b$

2D-Gleichungssystem

Man kann sich die Funktion $a_{11}x + a_{12}y$ als Fläche vorstellen, deren Steigung entlang der x-Achse a_{11} und deren Steigung entlang der y-Achse a_{12} ist. Die Gleichung $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ gibt an, wo die Fläche die Höhe b_1 hat. Diese Bedingung ist nicht nur an einem einzelnen Punkt, sondern entlang einer gesamten Linie erfüllt.

Um eine einzelne Lösung zu bekommen, benötigt man eine zweite Bedingung, die durch das Schneiden einer anderen Fläche mit einer anderen Höhe entlang einer anderen Linie erfüllt ist.

Die Lösung ist an dem Punkt, wo sich die beiden Geraden in der xy-Ebene schneiden (das heißt dort, wo die Geraden direkt übereinander sind), weil dort beide Bedingungen erfüllt sind (sowohl, dass die eine Ebene die Höhe b_1 hat, als auch dass die andere Ebene die Höhe b_2 hat).

Um das Gleichungssystem zu lösen, muss man die x-Koordinate auf die Höhe der einen Ebene und die y-Achse die Höhe der anderen Ebene abbilden. (Welche Achse auf die Höhe welcher Ebene abgebildet wird ist egal). An dieser Stelle wird das Verstehen von Abbildungen vorausgesetzt (Grundlagen zu diesem Thema siehe Skriptum „Räume und Abbildungen“ lesen).

Die Auswirkung der x-Koordinate auf die Höhe der ersten Ebene ist a_{11}, die Auswirkung der x-Koordinate auf die Höhe der zweiten Ebene ist a_{21}, die Auswirkung der y-Koordinate auf die Höhe der ersten Ebene ist a_{21}, die Auswirkung der y-Koordinate auf die Höhe der zweiten Ebene ist a_{22}. Die Höhe der ersten Ebene am Schnittpunkt ist b_1, die Höhe der zweiten Ebene am Schnittpunkt ist b_2. Insgesamt entspricht die Gleichung daher der Vektor-Matrix-Multiplikation

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

wobei x und y zu berechnen sind. Man erkennt, dass der Aufbau der Abbildungsmatrix analog zur Gleichungssystemmatrix

$$\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}$$

ist. Wenn man das Gleichungssystem mit der Cramer'schen Regel löst, erhält man analog die Abbildung

$$\begin{pmatrix} det(a) & 0 \\ 0 & det(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} det(a_1) \\ det(a_2) \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Das heißt die x-Koordinate wurde so gedreht, dass deren Höhe auf der zweiten Ebene konstant ist (sie geht parallel zur Lösungslinie des zweiten Gleichungssystems, denn die Höhe der Lösung ist ebenfalls konstant). Die y-Koordinate wurde so gedreht, dass diese auf der ersten Ebene konstant ist (sie geht parallel zur Lösungslinie des ersten Gleichungssystems).

Die Gleichung $det(a)x = det(a_1)$ unterscheidet sich nur deshalb vom eindimensionalen Fall, weil dieselbe Linie entlang der y-Achse unendlich oft hintereinander steht und so eine Ebene bildet. Die Lösung gibt nur an, wo auf der x-Achse sich der Schnittpunkt befindet (das heißt, wie lange man die y-Achse parallel verschieben muss, damit sie genau der Schnittlinie entspricht) ohne eine Aussage über den Wert auf der y-Achse zu machen.

Die Gleichung $det(a)y = det(a_2)$ macht genau das Gegenteil und gibt nur an, wie weit man die x-Achse parallel verschieben muss, damit sie auf der anderen Schnittlinie liegt. Der Schnittpunkt der so verschobenen Achsen ist die Lösung.

nD-Gleichungssystem

Bei höherdimensionalen Gleichungssystemen hat man nicht mehr genug Dimensionen um sich das Gleichungssystem graphisch vorzustellen. Es geht aber dennoch alles analog, sodass man sich genausogut 2D-Gleichungssysteme vorstellen kann.

Alle Angaben in diesem Skriptum sind ohne Gewähr. Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern.