Matrizen diagonalisieren

Einleitung

Bei diesem Skriptum wird das Verständnis von Räumen und Abbildungen vorausgesetzt. Diese Begriffe werden im Skriptum „Räume und Abbildungen - Einführung“ erklärt

Alle Angaben in diesem Skriptum sind ohne Gewähr. Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern.

1 Diagonalisierbarkeit

Diagonalisierbare Abbildungen können mit Diagonalmatrizen, also Matrizen die nur in den Diagonalelementen Werte ungleich 0 haben dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

Man kann sich diese wie einen Zerrspiegel vorstellen: Die x-Achse wird um den Faktor λ_1, die y-Achse um den Faktor λ_2 und die z-Achse um den Faktor λ_3 verzerrt. (Wenn alle λ positiv sind, spiegeln die Zerrspiegeln garnicht, wenn mehrere λ negativ sind, um mehrere Achsen).

Für viele Anwendungen ist eine Diagonalmatrix am praktischsten. Beispielsweise wenn man eine Abbildung mehrmals anwenden möchte, genügt es, die Diagonalwerte zu potenzieren, weil man dieselbe Achse immer nur mit demselben Wert multipliziert.

Bei anderen Matrizen muss man für jede wiederholte Abbildung erneut die Matrizenmultiplikation durchführen, weil sich auch andere Achsen auf die Verlängerung der einen Achse auswirken und diese nach jeder Abbildung eine neue Länge haben.

Oft hat man jedoch eine diagonalisierbare Abbildung, ohne dass eine Diagonalmatrix angegeben ist, zum Beispiel wenn der Zerrspiegel schief im Vergleich zum Koordinatensystem hängt. Wenn man eine derartige Abbildung mehrmals anwenden möchte, ist es sinnvoll, die Koordinaten so zu drehen, dass sie genauso schief wie der Zerrspiegel sind.

Man erhält eine Diagonalmatrix, die dieselbe Abbildung in anderen Koordinaten darstellt. Matrizen, die dieselbe Abbildung in unterschiedlichen Koordinaten darstellen, bezeichnet man als „zueinander kongruent“. Das Transformieren der Koordinaten, sodass eine Matrix diagonal wird, nennt man „Diagonalisierung“.

Wenn man das Ergebnis in den ursprünglichen Koordinaten darstellen möchte, kann man die Basisvektoren nach dem Potenzieren wieder zurückdrehen.

2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Betrachten wir noch einmal den gewöhnlichen Zerrspiegel

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Der Grund warum dieser so schön diagonal ist, ist, dass alle Koordinaten nach der Abbildung nur gestaucht oder gestreckt werden, nicht jedoch in eine andere Richtung zeigen.

Um eine andere Matrix zu diagonalisieren, muss man daher jene Vektoren $\vec{b}$ finden, die nach der Abbildung in die selbe Richtung schauen, das heißt, bei denen die Abbildung a nur dazu führt, dass sie mit einer Zahl λ multipliziert werden.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

Entlang dieser Vektoren werden nachher die Koordinaten gelegt. Man bezeichnet die Vektoren $\vec{b}$ als „Eigenvektoren“ und die Werte λ als „Eigenwerte“.

Um die Eigenwerte zu berechnen, muss man das lineare Gleichungssystem nach λ lösen. Danach kann man dieses λ ins Gleichungssystem einsetzen und das Gleichungssystem nach b_1 und b_2 lösen

Lösen mittels Gauß-Jordan-Algorithmus
Genaue Erklärung siehe Skriptum „Lineare Gleichungssysteme lösen“

Im folgenden ist links die Matrizennotation und rechts ist die Darstellung als Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} a_{11}b_1 + a_{12}b_2 &= \lambda b_1 \\ a_{21}b_1 + a_{22}b_2 &= \lambda b_2 \end{aligned}$$

1. Subtraktion der rechten Seite führt auf die neue Matrix a-$\lambda\mathbb{1}$, wobei $\mathbb{1}$ das Symbol für die Einheitsmatrix ist.

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} (a_{11}-\lambda)b_1 + a_{12}b_2 &= 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22}-\lambda)b_2 &= 0 \end{aligned}$$

2. Eliminierung aller Zeilen abgesehen von den Diagonalen liefert

$$\begin{pmatrix} det(a-\lambda \mathbb{1}) & 0 \\ 0 & det(a-\lambda \mathbb{1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} det(a-\lambda \mathbb{1})b_1 = 0 \\ det(a-\lambda \mathbb{1})b_2 = 0 \end{matrix}$$

Es gilt $b_1 \neq 0$ und $b_2 \neq 0$, denn wenn eine der beiden Komponenten 0 wäre, würde der Eigenvektor genau in Richtung einer Koordinate gehen und die Matrix wäre schon zu Beginn eine Diagonalmatrix.

Wenn beide Komponenten 0 wären, hätte der Vektor keine Länge und könnte daher durch die Abbildung sowieso nicht verändert werden. Er hat jedoch auch keine Richtung und kann daher keine Koordinate angeben.

Man erhält deshalb alle sinnvollen Lösungen, wenn man durch b_1 oder b_2 dividiert. Das führt zur Beziehung det(a-$\lambda \mathbb{1}$)=0.

Einsetzen des Gleichungssystems in die Formel für die Determinante ergibt für ein 2D-Gleichungssystem eine quadratische Gleichung mit bis zu 2 Lösungen. Diese kann man mit der Mitternachtsformel berechnen.

Für ein nD-Gleichungssystem erhält man eine Gleichung mit der höchsten Potenz n. Dafür gibt es zwar im Allgemeinen kein Lösungsverfahren, man kann jedoch (zum Beispiel mit Hilfe eines Computers) bis zu n Lösungen finden.

3 Eigenräume

Wenn man die unterschiedlichen Eigenwerte in das Gleichungssystem einsetzt, kann man die Komponenten b_1 und b_2 berechnen. Dabei bekommt man jedoch nicht nur einen Vektor sondern ganz viele. Beispielsweise könnte das Ergebnis für den Eigenwert $\lambda_1 = 3$

$$b_1 = b_2 \tag{3.1}$$

lauten. Das bedeutet, dass alle Vektoren, bei denen die b_1-Komponente genauso groß wie die b_2-Komponente ist, durch die Abbildung mit 3 multipliziert werden, ohne dass sich die Richtung ändert.

Eine Koordinate muss man folglich so legen, dass sie im 45°-Winkel genau zwischen x-Achse und y-Achse durchgeht, damit die Werte auf beiden Achsen gleich groß sind. Die Menge der Vektoren entlang dieser Achse (also die Menge aller Eigenvektoren zu λ_1) bezeichnet man als Eigenraum zum Wert λ_1. Man kann sie allgemein mit der Schreibweise

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

anschreiben, wobei man für k jede beliebige Zahl einsetzen kann. In dieser Darstellung sind alle Vektoren, in denen beide Komponenten gleich sind, enthalten, denn um einen Vektor zu erreichen, muss man nur k genauso groß wie die beiden Komponenten wählen.

Welche Zahlen man in den Vektor schreibt ist egal, solange beide Gleichung 3.1. erfüllen. Man kann den Eigenraum beispielsweise genauso mit der Gleichung

$$k \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

angeben, in dem Fall erreicht man jeden Vektor, wenn k halb so groß ist, wie die Komponenten. Man kann daher für eine Unbekannte jede beliebige Zahl einsetzen. Die zweite Komponente muss man sich durch Einsetzen der Wahl der anderen Komponente ausrechnen, damit Gleichung 3.1. erfüllt ist.

Manchmal kann man durch die Wahl einer Komponente nicht alle anderen bestimmen. Zum Beispiel wenn man auf die Gleichung $b_1 = b_2 + b_3$ kommt. In dem Fall sind zwei Komponenten beliebig und der Eigenraum ist zweidimensional (also eine Fläche). Alle Vektoren auf dieser Fläche werden um einen Eigenwert λ gestreckt oder gestaucht. Die Koordinaten kann man innerhalb des Eigenraums beliebig wählen.

Zuerst wählt man eine Koordinate, entlang der $b_2 = 0$ gilt. Man erhält $b_1 = b_3$. Entlang dieser Koordinate gehen alle Vektoren, die ein Vielfaches von (1,0,1) sind. Für $b_3 = 0$ und $b_2 = 1$ erhält man analog den Vektor (1,1,0).

Der Eigenraum wird durch die zwei Vektoren (1,0,1) und (1,1,0) aufgespannt. Jeden Vektor in diesem Eigenraum erhält man folglich, indem man zuerst beliebig lang entlang des einen Vektors und dann beliebig lang entlang des anderen Vektors geht. Allgemein kann man den Eigenraum daher mit der Vektoraddition

$$k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

beschreiben.

Allgemein kann man irgendeinen Wert irgendwie wählen. Die dadurch nicht bestimmten Werte setzt man 0 und erhält damit den ersten Vektor. Dann nimmt man einen der noch unbestimmten Werte, setzt für den irgendwas ein und wieder alle anderen Werte 0 (auch die, die vorher schon bestimmt wurden). Damit erhält man den zweiten Vektor. Dann nimmt man wieder einen Wert, der noch nie bestimmt wurde, setzt für den irgendwas ein und alle anderen Werte 0. Das macht man so lange, bis alle Werte einmal bestimmt wurden. Dann schreibt man alle Vektoren mit unterschiedlichen Buchstaben davor und Pluszeichen dazwischen und erhält so den Eigenraum.

4 Sylvestrischer Trägheitssatz

Wenn man die Einheitsvektoren so wählt, dass sie in dieselbe Richtung wie die Eigenvektoren schauen und die Länge 1 ist, wird jede dieser Koordinaten um den jeweilgen Eigenwert λ gestaucht, in der Diagonale der Abbildungsmatrix stehen daher die Eigenwerte und man muss zum mehrmaligen Ausführen der Abbildung nur die Diagonalwerte potenzieren.

Noch einfacher wird die Aufgabe, wenn man die Einheitsvektoren genauso lang wie den Betrag der Eigenwerte wählt. Dann sind die Diagonalwerte in den neuen Einheiten genau 1, -1 oder 0, das heißt die Werte 1 und 0 bleiben gleich und beim Wert -1 erhält man für gerade Potenzen den Wert 1 und für ungerade den Wert -1.

Jetzt kann man sich fragen, ob man überhaupt unterschiedlich lange Einheitsvektoren verwenden darf. Da die Vektoren in unterschiedliche Richtungen zeigen, ist das kein Problem, dass ist so, wie wenn man zuerst 5cm nach rechts und dann 5m nach oben geht, da muss man auch keine Einheiten umrechnen. Problematisch würde es erst, wenn man beispielsweise die Länge des gesamten Weges, eine Fläche oder einen Winkel berechnen würde.

Da wir das nicht vor haben, sondern gleich nach der Potenzierung der Matrix die Koordinaten zurückdrehen, können wir das schon machen. Wir müssen nur aufpassen, dass die Koordinatenänderung eindeutig umkehrbar bleibt. (Beispielsweise dürfen wir nur mit dem Betrag des Eigenwerts und nicht mit dem Eigenwert selber multiplizieren, denn die Potenzierung eines positiven und eines negativen Werts ergibt dasselbe, sodass wir beim Zurückdrehen nicht mehr wissen, ob wir mit dem positiven oder mit dem negativen Wert gerechnet haben.

5 Orthogonalisierung

Wenn man nach der Potenzierung im neuen Koordinatensystem bleiben möchte, ist es für viele Anwendungen notwendig, dass alle Basisvektoren im rechten Winkel aufeinander stehen und die Länge 1 haben. Man bezeichnet ein derartiges Koordinatensystem als „Orthogonalsystem".

Damit man das überhaupt erreichen kann, müssen die Zerrachsen des Spiegels alle im rechten Winkel aufeinander stehen, dass heißt, die Eigenvektoren müssen im rechten Winkel aufeinander stehen. Das kann man überprüfen, indem man die Eigenvektoren miteinander multipliziert und überprüft, ob das Resultat immer 0 ist.

Bei mehrdimensionalen Eigenräumen muss man nur einen beliebigen Vektor innerhalb dieses Eigenraums mit den anderen Vektoren multiplizieren. Wenn man Flächen betrachtet, ist das intuitiv klar: Wenn zwei Flächen im rechten Winkel zueinander stehen, stehen zwei beliebige Linien in je einer der beiden Flächen ebenfalls im rechten Winkel zueinander, weil der Winkelbogen immer von einer Fläche zur anderen geht. Bei höherdimensionalen Eigenräumen ist das genau so.

Wenn alles orthogonal ist, kann man die eindimensionalen Eigenvektoren durch ihre Länge dividieren, damit sie den Betrag 1 haben. Innerhalb der mehrdimensionalen

Eigenräume muss man die Vektoren mit Hilfe des Gram-Schmidt-Verfahrens so legen, dass sie genau orthogonal zueinander sind

Orthogonalisieren mittels Gram-Schmidt-Verfahren
Genaue Erklärung siehe Skriptum „Gram-Schmidt-Verfahren“

1. Normieren des ersten Vektors $\vec{v_1}$: Division durch den Betrag$|\vec{v_1}|$
2. Orthogonalisieren des zweiten Vektors bezüglich des ersten Vektors: Subtraktion des Skalarprodukts $\vec{v_1}\vec{v_2}$ vom zweiten Vektor $\vec{v_2}$
3. Normieren des zweiten Vektors
4. Orthogonalisieren des dritten Vektors bezüglich der bisher berechneten Vektoren ($\vec{v_1}$ und $\vec{v_2}$)

Dieses Verfahren setzt man so lange fort, bis man alle Vektoren innerhalb des Eigenraums orthogonalisiert hat. Für jeden weiteren Eigenraum fängt man das Verfahren von vorne an.

6 Koordinatentransformationen

Um die Koordinaten so zu transformieren, dass die Abbildungsmatrix diagonal wird, muss man jede Koordinate entlang eines Eigenvektors abbilden. Beispielsweise kann man den x-Basisvektor auf den ersten Eigenvektor, den y-Basisvektor auf den zweiten Eigenvektor und so weiter abbilden.

Das bedeutet, dass in der ersten Spalte (die die Transformation des x-Basisvektors angibt) in der Transformationsmatrix der erste Eigenvektor steht. In der zweiten Spalte steht der zweite Eigenvektor, in der dritten der dritte und so weiter. Welcher Spalte man welchen Eigenvektor zuordnet bzw. welche Koordinate man auf welchen Eigenvektor abbildet ist egal.

Wenn man die Eigenvektoren mit dem Gram-Schmidt-Verfahren orthogonalisiert hat (sodass die Länge 1 ist) stehen in den Diagonalelementen genau die Eigenwerte. Das muss so sein, denn die Eigenwerte sind ja die Faktoren, um die die Eigenvektoren gestreckt bzw. gestaucht werden.

Wenn man die Eigenvektoren mit Hilfe des Sylvestrischen Trägheitssatzes gedehnt oder gestaucht hat (sodass die Länge $|\lambda|$ ist), stehen in den Diagonalelementen nur 1er, -1er und 0er. (genauso viele 1er wie es positive und genauso viele -1er wie es negative Eigenwerte gibt).

Nach dem Potenzieren muss man, sofern man die abgebildeten Vektoren in den ursprünglichen Koordinaten braucht oder mangels Orthogonalität der Eigenräume, nicht das Gram-Schmidt-Verfahren anwenden konnte, diese wieder in die ursprüngliche Basis legen, das heißt die Koordinaten wieder zurückdrehen.

Dafür benötigt man die so genannte inverse Transformationsmatrix S^{-1}. (Die Notation ist analog wie beim inversen Element der Multiplikation $axx^{-1} = ax^1x^{-1} = ax^0 = a1 = a$, bei dem die Zahl a gleich bleibt). In dem Fall handelt es sich bei der Zahl um die Basis und bei der Multiplikation um die Abbildung. Die Basis soll nach

Transformation und Rücktransformation gleich bleiben.

Um die inverse Matrix zu berechnen, nutzt man aus, dass die Matrix auch ein lineares Gleichungssystem definiert. Man schreibt links die Transformationsmatrix und rechts die Einheitsmatrix auf

$$\begin{array}{cc|cc} S_{11} & S_{12} & 1 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 1 \end{array}$$

Intuitiv bedeutet das, dass jeder beliebige Vektor (x,y) in der transformierten Basis (mit den transformierten Basisvektoren) genauso groß wie in der Standardbasis (mit den Basisvektoren (1,0) und (0,1)) ist

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Man kann dieses Gleichungssystem wie gewohnt mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus umformen. Das macht man so lange, bis links die Einheitsmatrix steht.

Das bedeutet, man hat die Einheitsvektoren so umdefiniert, dass die linke Matrix (das ist immer noch unsere Transformation) genau den Einheitsvektoren entspricht. Die rechte Matrix (die immer noch unserer ursprünglichen Basis entspricht) ist die ursprüngliche Basis in den neuen Koordinaten und somit die Matrix, die man verwenden muss, um die transformierten Einheitsvektoren wieder in die ursprünglichen Einheitsvektoren überzuführen (S^{-1}).

Insgesamt hat man die Diagonalmatrix D erreicht, indem man die ursprüngliche Matrix A mit der Transformationsmatrix S transformiert hat. Um zur ursprünglichen Matrix zurückzukommen, muss man mit der inversen Transformationsmatrix S^{-1} zurücktransformieren. Insgesamt kann man A folglich aufteilen in

$$A = SDS^{-1} \tag{6.2}$$

Potenzierung ergibt

$$A^n = SDS^{-1}SDS^{-1}...SDS^{-1} \tag{6.3}$$

wodurch sich alle Faktoren SS^{-1} in der Mitte wegheben, sodass man insgesamt die Formel

$$A = SD^nS^{-1} \tag{6.4}$$

erhält.

7 Komplexe Diagonalisierbarkeit

Wenn man in die komplexe Ebene wechselt, kann man selbst Matrizen diagonalisieren, die scheinbar nicht durch Zerrspiegel dargestellt werden können, wie zum Beispiel Drehungen.

Dazu rechnet man wie in diesem Skriptum für reele Werte beschrieben, bekommt beim Lösen des Gleichungssystems jedoch nur komplexe Lösungen, was bedeutet, dass die Zerrachsen nicht wirklich existieren. Bei der Rücktransformation sollten sich die komplexen Zahlen wieder wegkürzen, sodass man wieder eine Abbildung zwischen reellen Zahlen hat.

Falls man den Sylvestrischen Trägheitssatz anwenden möchte, kann man weiterhin nur durch den Betrag von λ dividieren und erhält damit in Polarkoordinaten eine Zahl in der Form $e^{i\phi}$. Man erspart sich folglich das Potenzieren des Betrags muss aber weiterhin den Winkel multiplizieren.

Nicht diagonalisierbare Matrizen gibt es trotzdem und zwar dann, wenn die Eigenräume zusammen weniger Dimensionen als die Matrix Zeilen hat und man deshalb nicht ausreichend Eigenvektoren für alle Dimensionen findet.

8 Gleichzeitig Diagonalisierbare Matrizen

Manchmal möchte man nicht nur eine Abbildung mehrmals anwenden (Matrix potenzieren) sondern auch unterschiedliche Abbildungen kombinieren (Matrix multiplizieren). Dabei kommt man normalerweise nicht um die Matrizenmultiplikation herum, weil die beiden Matrizen, wenn überhaupt, in unterschiedlichen Basisvektorsystemen diagonal sind.

Es gibt jedoch auch Ausnahmen: Matrizen, die im gleichen Basisvektorsystem diagonal sind, bezeichnet man als gleichzeitig oder simultan diagonalisierbar. Anschaulich bedeutet das, dass die Zerrspiegeln beider Matrizen genau in die gleiche Richtung aufgehängt sind und diese daher dieselben Eigenvektoren haben (sie müssen aber das Bild nicht gleich stark verzerren und können daher unterschiedliche Eigenwerte haben).

Bei der gleichzeitigen Diagonalisierung muss man die Eigenvektoren nur einmal berechnen, weil die Basisvektoren laut Voraussetzung beide gleich sind. Die Eigenwerte muss man wie gewohnt für alle Matrizen berechnen.

Gleichzeitig diagonalisierbare Matrizen erkennt man am leichtesten daran, dass sie immer kommutativ sind. Schließlich macht es keinen Unterschied, ob die Basisvektoren zuerst um die Faktoren a bzw. b und dann um die Faktoren c bzw. d oder umgekehrt gestaucht werden, die Basisvektoren und somit auch alle möglichen Kombinationen daraus sind nachher gleich.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \tag{8.1}$$

Bei anderen Matrizen, bei dem in jeder Basis nur maximal eine Matrix in Diagonalgestalt ist, ist das nicht so

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac & ae \\ be & cf \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ac & bd \\ ae & bf \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

9 Zusammenfassung

I. Das müsst ihr machen, um Matrizen zu diagonalisieren (Seiten 2 - 3):

1. $\lambda\mathbb{1}$ von der Matrix a abziehen
2. Die Determinante der resultierenden Matrix mit 0 gleichsetzen und nach λ auflösen
3. Die Eigenwerte λ nacheinander in die Diagonale schreiben

II. Das müsst ihr machen, um Eigenvektoren zu berechnen (Seiten 3 - 4):

1. Einsetzen eines λ in det(a-$\lambda\mathbb{1}$)b_i=0 für jede Koordinate i
2. Lösen des Gleichungssystems
3. Ein b_i gleich 1 setzen, die anderen b_j durch Einsetzen von b_i in die Lösung des Gleichungssystems bestimmen
4. Wenn nicht alle b_j bestimmt werden können ein b_j=0 setzen. Diesen Schritt so lange wiederholen bis alle Vektorkomponenten bestimmt sind. Alle Vektorkomponenten zusammen ergeben einen Eigenvektor
5. Die Schritte 3 und 4 für alle in Schritt 4 mit 0 gleichgesetzten b_j wiederholen. Das ergibt weitere Eigenvektoren desselben Eigenraumes
6. Eine Linearkombination aller Eigenvektoren zur Angabe des Eigenraumes aufschreiben
7. Alle Schritte für alle weiteren λ wiederholen

III. Das müsst ihr machen, um Matrizen im bestehenden Koordinatensystem zu potenzieren (Seiten 2 - 8):

1. Matrix diagonalisieren (siehe I)
2. Jede Zeile durch $|\lambda|$ dividieren
3. Die Diagonaleinträge der Matrix potenzieren
4. Berechnung der Eigenvektoren (siehe II)
5. Division der Eigenvektoren durch ihren Betrag
6. Multiplikation der normierten Eigenvektoren mit $|\lambda|$
7. Aufstellen der Transformationsmatrix durch Untereinanderschreibung der Eigenvektoren mit Länge λ

8. Aufstellen der inversen Transformationsmatrix durch Gleichsetzung der Transformationsmatrix mit der Einheitsmatrix und Umkehrung des Gleichungssystems

9. Rücktransformation durch Einsetzen in die Formel $A^n = SD^nS^{-1}$

IV. Das müsst ihr machen, um Matrizen in einem neuen Koordinatensystem zu potenzieren (Seiten 2 - 3):

1. Matrix diagonalisieren (siehe I)

2. Die Diagonaleinträge der Matrix potenzieren

3. Falls man andere Vektoren oder Matrizen in dieses neue Koordinatensystem holen möchte, muss man eine Transformationsmatrix berechnen (siehe V)

V. Das müsst ihr machen, um die Transformationsmatrix in ein neues Koordinatensystem zu bestimmen (Seiten 2 - 8)
Man möchte eine Transformationsmatrix berechnen, in der eine Matrix eine Diagonalgestalt hat (siehe IV.3)

1. Berechnung der Eigenvektoren durch Einsetzen aller λ und Lösen der Gleichungssysteme

2. Orthogonalität der Eigenräume überprüfen. Falls sie nicht orthogonal sind, muss man die Matrix im bestehenden Koordinatensystem potenzieren

3. Orthogonalisieren der Vektoren in den Eigenräumen mit dem Gram-Schmidt-Verfahren. Nicht auf das Normieren der Vektoren in 1D-Eigenräumen vergessen!

4. Aufstellen der Transformationsmatrix durch untereinanderschreiben der orthogonalisierten Eigenvektoren

5. Alle Vektoren, auf die man die potenzierte Matrix anwenden möchte durch Multiplikation mit der Transformationsmatrix transformieren

10 Übungsaufgaben

1. Diagonalisiere die 2-dimensionale Drehmatrix mit dem Winkel $\frac{\pi}{8}$
2. Potenziere diese Drehmatrix im bestehenden Koordinatensystem mit 8
3. Potenziere diese Drehmatrix im neuen Koordinatensystem mit 8
4. Berechne die Transformationsmatrix ins neue Koordinatensystem aus Aufgabe 3
5. Überlege dir welche Matrizen mit dieser Drehmatrix gleichzeitig diagonalisierbar sind.
6. Überlege dir die physikalische Bedeutung von Diagonalmatrizen mit 2 komplex konjugierten Eigenwerten

Tipps für alle Übungsaufgaben: Verwende die Eulerschen Formeln $cos\phi + isin\phi = e^{i\phi}$, $cos\phi - isin\phi = e^{-i\phi}$ und den Pythagoras $cos^2\phi + sin^2\phi = 1$

11 Lösungen

Aufgabe 1

Die Drehmatrix um den Winkel $\frac{\pi}{8}$ lautet

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

Subtraktion von $\lambda \mathbb{1}$

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) - \lambda & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) - \lambda \end{pmatrix} \tag{11.2}$$

Gleichsetzen der Determinante mit 0

$$(cos(\frac{\pi}{8}) - \lambda)^2 + sin^2(\frac{\pi}{8}) = 0 \tag{11.3}$$

Ausmultiplizieren

$$cos^2(\frac{\pi}{8}) - 2\lambda cos(\frac{\pi}{8}) + \lambda^2 + sin^2(\frac{\pi}{8}) = 0 \tag{11.4}$$

Ausnützen der Formel $cos^2\phi + sin^2\phi = 1$

$$1 - 2\lambda cos(\frac{\pi}{8}) + \lambda^2 = 0 \tag{11.5}$$

Lösen der quadratischen Gleichung mit der Mitternachtsformel

$$\lambda = cos(\frac{\pi}{8}) \pm \sqrt{cos^2(\frac{\pi}{8}) - 1} \tag{11.6}$$

Einsetzen der Formel $1 = cos^2\phi + sin^2\phi$

$$\lambda = cos(\frac{\pi}{8}) \pm \sqrt{cos^2(\frac{\pi}{8}) - cos^2(\frac{\pi}{8}) - sin^2(\frac{\pi}{8})} \tag{11.7}$$

Kürzen des Cosinus und Wurzel ziehen

$$\lambda = cos(\frac{\pi}{8}) \pm isin(\frac{\pi}{8}) \tag{11.8}$$

Vereinfachen mit der Eulerschen Formel

$$\lambda = e^{\pm i(\frac{\pi}{8})} \tag{11.9}$$

Die Diagonalmatrix lautet folglich

$$\begin{pmatrix} e^{i(\frac{\pi}{8})} & 0 \\ 0 & e^{-i(\frac{\pi}{8})} \end{pmatrix} \tag{11.10}$$

Aufgabe 2

Die Diagonalmatrix ist bereits aus Beispiel 1 bekannt.

Der Betrag der Eigenwerte ist bereits 1 (in Polardarstellung ist der Betrag die Zahl vor dem Exponenten. Da dort keine steht, ist sie 1). Potenzierung mit 8 erfolgt durch Multiplikation des Exponenten mit 8

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} \tag{11.11}$$

Vereinfachung der Matrix mit der Formel $e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$ bzw. $e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi$ und den Beziehungen $cos\pi = -1$ und $sin\pi = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.12}$$

Berechnung des ersten Eigenvektors durch Einsetzen von $\lambda = e^{i\frac{\pi}{8}}$

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) - e^{i\frac{\pi}{8}} & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) - e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.13}$$

Einsetzen der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$ und kürzen des Cosinus

$$\begin{pmatrix} -isin(\frac{\pi}{8}) & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & -isin(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.14}$$

Division durch $sin(\frac{\pi}{8})$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.15}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit i

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.16}$$

Addition der zweiten Zeile zur ersten Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.17}$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems

$$b_1 - ib_2 = 0 \Rightarrow b_1 = ib_2 \tag{11.18}$$

Willkürliches einsetzen von $b_2 = 1$ ergibt $b_1 = i$ und damit den Eigenraum

$$k \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.19}$$

Berechnung des zweiten Eigenvektors durch Einsetzen von $\lambda = e^{-i\frac{\pi}{8}}$

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) - e^{-i\frac{\pi}{8}} & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) - e^{-i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.20}$$

Einsetzen der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = cos\phi - isin\phi$ und kürzen des Cosinus

$$\begin{pmatrix} isin(\frac{\pi}{8}) & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & isin(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.21}$$

Division durch $sin(\frac{\pi}{8})$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.22}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit i

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.23}$$

Addition der zweiten Zeile zur ersten Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.24}$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems

$$b_1 + ib_2 = 0 \Rightarrow b_1 = -ib_2 \tag{11.25}$$

Willkürliches einsetzen von $b_2 = 1$ ergibt $b_1 = -i$ und damit den Eigenraum

$$l \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.26}$$

Beim Betrag der komplexen Zahlen muss man aufpassen: Da die Länge in der komplexen Ebene positiv ist (der Betrag der komplexen Zahl) ist der Gesamtbetrag des Vektors auch positiv (Genaue Erklärung siehe Skriptum „Euklidische und unitäre Räume“).

$$\sqrt{1^2 + |i|^2} = \sqrt{2} \tag{11.27}$$

Division durch $\sqrt{2}$ ergibt die normierten Eigenvektoren mit Betrag 1. Da die Eigenwerte ebenfalls den Betrag 1 haben, muss man nicht mehr weiter multiplizieren sondern kann gleich die Transformationsmatrix aufstellen.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{11.28}$$

Berechnen der Rücktransformation durch Multiplikation mit $\sqrt{2}$

$$\begin{array}{cc|cc} i & -i & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{array}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit i

$$\begin{array}{cc|cc} -1 & 1 & i\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{array}$$

Subtraktion der zweiten Zeile von der ersten Zeile und Addition der ersten Zeile zur zweiten Zeile

$$\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & i\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & i\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{array}$$

Division der ersten Zeile durch -2 und der zweiten Zeile durch 2 führt auf die Rücktransformation

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{11.29}$$

Einsetzen in die Formel $A^n = SD^nS^{-1}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{11.30}$$

Ausmultiplizieren führt auf die Drehmatrix um den Winkel π (Spiegelung beider Achsen)

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.31}$$

Das ist auch das erwartete Ergebnis, denn wenn man den Raum acht mal um den Winkel $\frac{\pi}{8}$ dreht, hat man ihn insgesamt um den Winkel π gedreht.

Aufgabe 3

Die Diagonalmatrix ist bereits aus Beispiel 1 bekannt. Potenzierung mit 8 erfolgt durch Multiplikation der Exponenten mit 8.

$$\begin{pmatrix} e^{i\pi} & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} \tag{11.32}$$

Vereinfachung der Matrix mit der Formel $e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$ bzw. $e^{-i\phi} = cos\phi - isin\phi$ und den Beziehungen $cos\pi = -1$ und $sin\pi = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11.33}$$

Aufgabe 4

Berechnung des ersten Eigenvektors durch Einsetzen von $\lambda = e^{i\frac{\pi}{8}}$

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) - e^{i\frac{\pi}{8}} & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) - e^{i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.34}$$

Einsetzen der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = cos\phi + isin\phi$ und kürzen des Cosinus

$$\begin{pmatrix} -isin(\frac{\pi}{8}) & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & -isin(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.35}$$

Division durch $sin(\frac{\pi}{8})$

$$\begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.36}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit i

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.37}$$

Addition der zweiten Zeile zur ersten Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.38}$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems

$$b_1 - ib_2 = 0 \Rightarrow b_1 = ib_2 \tag{11.39}$$

Willkürliches einsetzen von $b_2 = 1$ ergibt $b_1 = i$ und damit den Eigenraum

$$k \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.40}$$

Berechnung des zweiten Eigenvektors durch Einsetzen von $\lambda = e^{-i\frac{\pi}{8}}$

$$\begin{pmatrix} cos(\frac{\pi}{8}) - e^{-i\frac{\pi}{8}} & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & cos(\frac{\pi}{8}) - e^{-i\frac{\pi}{8}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.41}$$

Einsetzen der Eulerschen Formel $e^{i\phi} = cos\phi - isin\phi$ und kürzen des Cosinus

$$\begin{pmatrix} isin(\frac{\pi}{8}) & -sin(\frac{\pi}{8}) \\ sin(\frac{\pi}{8}) & isin(\frac{\pi}{8}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.42}$$

Division durch $sin(\frac{\pi}{8})$

$$\begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.43}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit i

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.44}$$

Addition der zweiten Zeile zur ersten Zeile

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.45}$$

Ausmultiplizieren des Gleichungssystems

$$b_1 + ib_2 = 0 \Rightarrow b_1 = -ib_2 \tag{11.46}$$

Willkürliches einsetzen von $b_2 = 1$ ergibt $b_1 = -i$ und damit den Eigenraum

$$l \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11.47}$$

Da es keine mehrdimensionalen Eigenräume gibt, entfällt das Prüfen der Orthogonalität dieser Eigenräume.

Um die Orthogonalität der Eigenvektoren zu prüfen, benötigt man das komplexe Skalarprodukt, bei dem einer der beiden Faktoren komplex konjugiert ist (Genaue Erklärung siehe Skriptum „Euklidische und Unitäre Räume“)

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{11.48}$$

Da die Vektoren schon orthogonal sind, muss man diese nur noch durch ihren Betrag dividieren um ein Orthogonalsystem zu erhalten. Dabei benutzt man den komplexen Betrag, der als Wurzel aus dem komplexe Skalarprodukt mit sich selbst definiert ist.

$$\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \tag{11.49}$$

Folglich muss man die Eigenvektoren durch $\sqrt{2}$ dividieren und die Transformationsmatrix lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{pmatrix} \tag{11.50}$$

Das Koordinatensystem, das man mit dieser Transformation erreicht, liegt genau so, dass die Spiegelachse auf der x-Koordinate liegt, sodass die Spiegelmatrix einfach ist.

Aufgabe 5

Alle Matrizen die zusätzlich zur Drehung um $\frac{\pi}{8}$ eine Dehnung oder Stauchung auslösen, verlängern ebenfalls die selben Achsen. Es sind daher physikalisch gesehen alle Matrizen, bei denen die beiden Diagonaleinträge mit unterschiedlichen reellen Zahlen a, b multipliziert werden.

$$\begin{pmatrix} ae^{i(\frac{\pi}{8})} & 0 \\ 0 & be^{-i(\frac{\pi}{8})} \end{pmatrix} \tag{11.51}$$

Mathematisch gesehen kann man diese Matrizen auch anders darstellen, wenn man das Koordinatensystem anders legt. Sie beschreiben dann aber dennoch immer dieselbe Drehung.

Aufgabe 6

Matrizen mit komplex konjugierten Diagonaleinträgen $ze^{i\phi}$ und $ze^{-i\phi}$ beschreiben Drehungen um den Winkel ϕ und Vergrößerung bzw. Verkleinerung mit dem Faktor z.

Das kann man sich überlegen, weil man durch Potenzierung der Matrix aus Beispiel 1 mit $\frac{8\phi}{\pi}$ und Multiplikation mit z jede beliebige Zahl $ze^{i\phi}$ in den Diagonaleinträgen erreichen kann.

Potenzierung bedeutet, dass man die Drehung beliebig oft hintereinander ausführt, bzw. bei Kommazahlen nur Teile der Drehung. Multiplikation mit z bedeutet, dass beide Achsen um den Faktor z gedehnt bzw. gestaucht werden, sodass das gesamte System um den Faktor z vergrößert bzw. verkleinert wird.