Taylorreihen

Alle Angaben ohne Gewähr

Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern

1 Taylornäherung um den Punkt 0

Wir betrachten eine Regenwolke, und wollen vorhersagen, wo diese nach einer kurzen Zeitspanne sein wird. Um das Rechnen zu erleichtern, legen wir die Zeitkoordinate so, dass der Zeitpunkt, an dem wir die Vorhersage machen, 0 ist.

Wenn die Vorhersage nicht weit in die Zukunft reicht, können wir annehmen, dass die Wolke nicht weit kommen wird. In einer sehr ungenauen Näherung ist daher ihre Position noch immer x(0). Diese Näherung, bei der man davon ausgeht, dass der Ort näherungsweise konstant ist, nennt man „Taylornäherung 0. Ordnung".

Wenn uns diese Näherung noch zu ungenau ist, müssen wir die Änderung des Ortes in unsere Rechnung einbeziehen. Diese bezeichnet man als Geschwindigkeit oder 1. Ableitung des Ortes. So gesehen kann man die Position der Wolke mit der Formel $x(0) + \dot{x}(0)t$ berechnen. Diese Näherung ist zwar besser als die Taylornäherung 0. Ordnung, aber immer noch nicht perfekt, denn die Geschwindigkeit ändert sich ihrerseits. Man bezeichnet die Näherung als Taylornäherung 1. Ordnung.

Um die Position noch genauer zu bestimmen, muss man die Änderung der Geschwindigkeit miteinbeziehen. Diese wird als Beschleunigung oder 2. Ableitung des Ortes bezeichnet. In der Taylornäherung 2. Ordnung nehmen wir an, dass diese konstant ist. Um zu berechnen, wie sich die Beschleunigung auf die Position der Wolke auswirkt, muss man diese zwei mal integrieren, wobei die Integrationskonstanten die weniger hohen Ableitungen zum Zeitpunkt 0 sind, sodass die weniger genauen Taylornäherungen im Ergebnis enthalten sind. Man erhält die Formel

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \ddot{x}(0)\frac{t^2}{2} \tag{1.1}$$

Diesen Vorgang kann man immer weiter fortsetzen, sofern man ausreichend viele Ortsableitungen gemessen hat. Um die n-te Taylornäherung zu berechnen muss man die n-te Ableitung des Ortes n mal integrieren. Bei jedem Integrationsschritt erhöht sich die Potenz um 1, sodass im Endeffekt ein n in der Potenz steht. Da immer durch die Potenz dividiert wird, wandert jede Zahl von 1 bis n in den Nenner, sodass darin ein n!-Term steht. In den Integrationskonstanten stehen alle weniger genauen Taylornäherungen, sodass bis zum Term mit n summiert wird. Insgesamt lautet die Formel für die n-te Taylornäherung daher

$$\sum_{k=0}^{n} x^{(k)}(0)\frac{t^k}{k!} \tag{1.2}$$

wobei $x^{(k)}$ für die kte Ableitung des Ortes steht.

Diese Näherung kann man nicht nur für die Ortsfunktion (also das Verhältnis von Ort und Zeit), sondern für alle beliebigen stetigen Funktionen verwenden. Dann setzt man statt t den Wert ein, den man auf der x-Achse aufträgt und für x den Wert, den man auf der y-Achse aufträgt.

Aufgaben

Berechne die Taylornäherung oder begründe, warum keine Taylornäherung sinnvoll ist

1.a. Eine Regenwolke befindet sich heute über Wien. Sie fliegt mit einer Geschwindigkeit von 100km pro Tag und beschleunigt um 2km pro Tag quadrat. Wie weit wird die Wolke morgen ungefähr von Wien entfernt sein, wie weit in einem Jahr?

1.b. Ein Golfball liegt 0,01 Sekunden vor dem Anschlag ruhig da (die Geschwindigkeit und alle ihre Ableitungen sind 0). Wie schnell ist der Golfball ungefähr 0,01 Sekunden nach dem Abschlag

Lösungen

1.a.i. Man setzt für die Zeit t 1 Tag ein (weil die Prognose 1 Tag in die Zukunft reicht). Um das Rechnen zu erleichtern, kann man das Koordinatensystem so legen, dass Wien im Ursprung liegt, sodass man für x(0) 0 einsetzen kann. $\dot{x}(0)$ $(1000km/d)$ und $\ddot{x}(0)$ $(2km/d^2)$ sind gegeben. Die höheren Ableitungen weiß man nicht, sodass man die Summe nur bis n=2 gehen lassen kann. Durch Einsetzen in Formel 1.2. erhält man eine Entfernung von 1001km

1.a.ii. Hier müsste man für t 365,25 einsetzen. Diese Zahl ist so groß, dass die höheren Ableitungen als die Beschleunigung extrem stark in die Formel eingehen. $\frac{t^3}{3!}$ ist ungefähr 10 Millionen, sodass man die Änderung der Beschleunigung mit 10 Millionen multiplizieren muss. (Zum Vergleich: Bei Beispiel a musste man diese mit $\frac{1}{6}$ multiplizieren). Das bedeutet, das jede noch so kleine Beschleunigungsänderung zu einem vollkommen anderen Ergebnis führt.

1.b. Bei diesem Beispiel vergeht zwar nicht viel Zeit (nur 0,02 Sekunden) eine sinnvolle Näherung ist aber dennoch nicht möglich, weil die Änderungen zu extrem sind (beim Abschlag ist die Beschleunigung und jede noch höhere Ableitung näherungsweise ∞, sodass man die Funktion an der Stelle des Anschlags näherungsweise als unstetig betrachten muss).

2 Taylornäherung um den Punkt a

Manchmal kann man die Zeitachse nicht so legen, dass der Startpunkt bei t=0 liegt, zum Beispiel wenn man die Zeitpunkte unterschiedlicher Ereignisse vergleichen möchte. In dem Fall muss man in die Formel statt dem Zeitpunkt der ersten Messung (0) ein (a) und statt der vergangenen Zeit seit der Messung t den Term $t - a$ einsetzen

$$\sum_{k=0}^{n} x^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!} \tag{2.1}$$

Aufgaben

2.a. Du programmierst einen Taschenrechner, der den Sinus auf 4 Stellen genau berechnen soll. Dafür ist es notwendig, eine Taylornäherung bis zur 10. Ordnung zu programmieren. Welche Formel verwendet der Taschenrechner, um den Sinus zu berechnen?

2.b. Der Flächeninhalt eines Kreises ist 4,1π. Berechne die Länge des Radius mit der 1. Taylornäherung ohne Taschenrechner.

Lösungen

2.a. Man kann in den Taschenrechner die Maximal-, Minimal- und Nullstellen der Sinus- und Cosinusfunktion (für die Ableitungen) einprogrammieren. Wenn der Benutzer eine Zahl eingibt, muss der Taschenrechner diese auf ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ runden, um den Entwicklungspunkt a zu erhalten. Das erreicht er, indem er die Angabe durch $\frac{\pi}{2}$ dividiert und das Ergebnis rundet. Wenn er das gerundete Ergebnis mit $\frac{\pi}{2}$ multipliziert, erhält er einen Wert bei dem das Ergebnis der Sinusfunktion und aller Ableitungen einprogrammiert ist, sodass er in die Taylorreihe (Formel 2.1.) einsetzen kann:

$$\sum_{k=0}^{10} sin^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!} \tag{2.2}$$

Explizit ausgeschrieben lautet die Formel

$$sin(a) + cos(a)(t-a) - sin(a)\frac{(t-a)^2}{2} - cos(a)\frac{(t-a)^3}{6} + ... \tag{2.3}$$

2.b. Der Radius ist die Wurzel aus 4,1. Die Wurzel aus 4 ist bekanntermaßen 2, folglich kann man die Taylorreihe um die Stelle a=4 entwickeln. Einsetzen in 2.1. ergibt

$$\sqrt{a} + \frac{t-a}{2\sqrt{a}} = \sqrt{4} + \frac{0,1}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0,1}{4} = 2,025 \tag{2.4}$$

3 Genauigkeit der Taylorreihe

Die Genauigkeit der Taylorreihe hängt von 3 Faktoren ab:

- Die Entfernung des Punktes um den genähert wird (In unserem Beispiel wie weit die Vorhersage in die Zukunft reicht)
- Die Anzahl der Terme die man berechnet (In unserem Beispiel, ob man nur die Geschwindigkeit oder auch die Beschleunigung der Wolke misst)
- Die Stärke der Änderungen (In unserem Beispiel wie stabil die Wetterlage ist)

Die Entfernung des Punktes, um den gemessen wird, geht über den Wert, den man für t einsetzt, in die Gleichung ein. Man erkennt, dass die höheren Ableitungen mit der Entfernung des Punktes immer schneller immer wichtiger werden, weil die Potenz bei jeder Ableitung höher ist. Wie man durch Einsetzen in (1.2.) sieht, wird bei $t = 2!$ die Beschleunigung wichtiger als die Geschwindigkeit, bei $t = \sqrt{3!}$ die Änderung der Beschleunigung und bei $t = \sqrt[n-1]{n!}$ die n-te Ableitung des Ortes. Man erkennt, dass in einer immer kürzeren Zeit immer mehr Ableitungen dazukommen, sodass Vorhersagen über einen langen Zeitraum fast unmöglich sind.

Die Anzahl der Terme geht über den Wert, den man für n einsetzt, in die Taylorreihe ein. Da t^n für jedes t langsamer ansteigt als n!, gibt es immer einen Term, ab dem die höheren Ableitungen immer unwichtiger werden. Die Ungenauigkeit, wenn man nach diesem Term abbricht, ist daher klein im Vergleich zum nachfolgenden Term.

Dass die Ungenauigkeit klein ist, falls die Potenz des nachfolgenden Terms klein ist, kann man mit der Notation $O(t^{n+1})$ am Ende der Taylorreihe notieren. Das O nennt man großes Landau-Symbol.

Die Obergrenze der Ungenauigkeit ist von der Stärke der Änderung abhängig. Beispielsweise ist die Ungenauigkeit einer Taylornäherung der Funktion $2e^x$ doppelt so groß, wie die Ungenauigkeit derselben Taylornäherung der Funktion e^x, weil sich alle Ableitungen bei der Funktion $2e^x$ doppelt so schnell ändern.

Um die maximale Ungenauigkeit der Näherung zu erhalten, muss man die Stelle mit der maximalen Abweichung (diese wird meistens als ξ bezeichnet) zwischen dem Punkt, um den genähert wird und den Punkt, den man nähern will in die Funktion einsetzen. Beispielsweise wäre dieser Wert bei der Sinusfunktion immer kleiner als 2, weil alle Ableitungen des Sinus zwischen 1 und -1 hin- und herpendeln und sich die Funktionswerte daher nie mehr als 2 Einheiten entfernen. Wenn man jedoch weniger als $\frac{\pi}{2}$ von dem Ort entfernt ist, um den man die Taylorreihe entwickelt (was bei der Sinusfunktion immer möglich ist), genügt es 1 einzusetzen, weil die Funktion in diesem Intervall nur ein Viertel der Schwingung durchführen kann.

Das Ergebnis wandert in die Proportionalitätskonstante, sodass die Ungenauigkeit fast wie ein weiterer Term der Taylorreihe ausschaut (abgesehen davon, dass statt des Entwicklungspunkts a der Punkt der maximalen Abweichung ξ eingesetzt wird.

$$\sum_{k=0}^{n} x^{(k)}(a)\frac{(t-a)^k}{k!} + x^{(k+1)}(\xi)\frac{(t-a)^{k+1}}{(k+1)!} \tag{3.1}$$

Dieser Zusatzterm wird als Lagrange'sches Restglied bezeichnet.

Aufgaben

3.a. Wie genau kann man e berechnen, wenn man die Exponentialfunktion bis zur 2. Taylornäherung um den Punkt 0 entwickelt?

3.b. Wie viele Terme benötigt man, um e auf 1 Nachkommastelle genau zu nähern?

Lösungen

3.a. Hier setzt man ins Lagrange'sche Restglied für k=2 (weil man die 2. Taylornäherung verwendet), für t=1 (weil man 1 Einheit von der Entwicklungsstelle entfernt ist) und für ξ=1 (weil die Exponentialfunktion streng monoton steigend ist, ist die maximale Ungenauigkeit am Ende des Intervalls) ein. Man erhält eine Ungenauigkeit von $\frac{e}{6}$

3.b. Bei dieser Aufgabe setzt man das Lagrange'sche Restglied mit 0,05 (weil sich diese Zahl durch Runden auf die zweite Nachkommastelle auswirkt) gleich. Da sich die Ableitung der Exponentialfunktion nie verändert, kann man für $x^{(k)}$ auf jeden Fall e einsetzen. Da jede Potenz von 1 1 ist, kann man für t^{k+1} auf jeden Fall 1 einsetzen. Man erhält die Beziehung

$$\frac{e}{(k+1)!} = 0,05 \tag{3.2}$$

Umformen ergibt die Gleichung (k+1)!=200e. 5! ergibt nur 120 (k=4 ist daher noch zu wenig). 6! ist 720 und das ist deutlich mehr als dreifach so viel wie 200, daher genügt eine Taylornäherung bis zur 5. Ordnung.

4 Differentialgleichungen

Bisher haben wir immer eine bekannte Funktion vorausgesetzt und damit die Taylorreihe aufgestellt. Oft ist es jedoch genau umgekehrt: Man kennt den Zusammenhang zwischen der Funktion und einer beliebigen Ableitung und soll herausfinden, für welche Funktionen dieser Zusammenhang gilt.

Betrachten wir als Beispiel eine Population von Zellen. Wenn sich die Zellen im Schnitt ein mal pro Sekunde teilen ist die Zunahme der Zellen pro Sekunde genauso groß wie die Anzahl der Zellen. Es gilt daher die Differentialgleichung Z'(0)=Z(0). Das bedeutet, dass sich die Funktion beim ableiten nicht verändert. In die Taylorreihe kann man daher für jede beliebige Ableitung Z(0) einsetzen

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} Z(0)\frac{t^n}{n!} \tag{4.1}$$

Die Zahl Z(0) kann man aus der Summe herausheben, weil sie von n unabhängig ist.

$$Z(t) = Z(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \tag{4.2}$$

Wenn wir wissen wollen, wie stark die Anzahl der Zellen nach 1 Sekunde angestiegen ist, setzen wir für t=1 ein und erhalten

$$Z(1) = Z(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \tag{4.3}$$

In der Summe stehen jetzt nur noch Zahlen. Wenn man beliebig viele Zahlen in die Summe einsetzt, nähert man sich beliebig nahe der Euler'schen Zahl an. Tatsächlich ist die Eulersche Zahl sogar über diese Reihe definiert. Man erhält

$$Z(1) = eZ(0) \tag{4.4}$$

Die Anzahl der Zellen hat also nach 1 Sekunde um das efache zugenommen.

Jetzt wundern sich wahrscheinlich einige, dass sich die Zahl der Zellen nicht pro Sekunde verdoppelt, schließlich stand in der Angabe ja, dass sich die Zellen durchschnittlich 1 mal pro Sekunde teilen. Die Zellen teilen sich jedoch nicht alle genau am Anfang des betrachteten Intervalls sondern gleichmäßig über das gesamte Intervall verteilt und in der Mitte des Intervalls sind bereits mehr Zellen da, als am Anfang.

Graphisch gesehen bedeutet das: Wenn man die Tangente bei der Stelle t=0 einzeichnet, schneidet diese tatsächlich den Punkt (1,2Z(0)). Wenn man diese jedoch bei einem späteren Teil des Intervalls einzeichnet, ist die Tangente steiler, weil auch das Z(t) größer ist.

Nachdem jetzt hoffentlich klar ist, warum die Zellen nach 1 Sekunde um das efache zugenommen haben, wollen wir diese Erkenntnis verallgemeinern. Da die Zunahme nicht von der Wahl des Ursprungs der Zeitkoordinate abhängt, kann man festhalten, dass die Anzahl der Zellen nach jeder Sekunde um das efache ansteigt. Nach 1 Sekunde ist die Zahl eZ(0), nach 2 Sekunden $e^2Z(0)$ und nach t Sekunden $e^tZ(0)$.

Man kann sich natürlich auch fragen, was passiert, wenn sich die Zellen pro Sekunde nicht einmal, sondern λ mal teilen. Das bedeutet, dass sich die Zellen durchschnittlich pro $\frac{1}{\lambda}$ Sekunden ein mal teilen und die Anzahl der Zellen daher schon nach einer $\frac{1}{\lambda}$ Sekunden um das e-fache zugenommen hat. Nach 1 Sekunde ist die Zahl der Zellen daher schon $e^{\lambda}Z(0)$ und nach t Sekunden sogar $e^{\lambda t}Z(0)$.

Allgemein kann man feststellen, dass alle Konstanten vor der abgeleiteten Funktion durch eine konstante innere Ableitung in der Exponentialfunktion hervorgerufen werden. (Z(t)=$e^{\lambda t}$ führt zu Z'(t)=$\lambda e^{\lambda t} = \lambda Z(t)$). Diese Überlegung nennt man Exponentialansatz.

Aufgaben

4a. Ein radioaktives Element zerfällt zu leichteren Elementen. Die Zerfallswahrscheinlichkeit beträgt 5% pro Sekunde. Wie groß ist die Menge des Elements nach 1 Stunde, wie lange dauert es, bis das Element ganz weg ist, wenn zum Zeitpunkt t=0 1kg vorhanden ist?

4.b.i. Die Beschleunigung eines Fadenpendels ist proportional zu seiner Auslenkung (x"(t)=-kx(t)). Leite mit Hilfe des Exponentialansatzes die Funktion x(t) her.
Tipp: Die innere Ableitung der positiven und der negativen Wurzel können sich auch addieren.

4.b.ii. Lege den Zeitpunkt t=0 zuerst so, dass die maximale Auslenkung bei t=0 ist und dann so, dass die Gleichgewichtslage bei t=0 ist. Vergleiche mit der Sinus- und Cosinusfunktion die ebenfalls bei zweimaliger Ableitung negativ sind. Zeichne die Rechnungen am Ende in die komplexe Ebene ein.

Lösungen

4.a. Im Unterschied zur Zellteilung (wo aus einer Zelle durch Teilung zwei wurden) zerfällt das radioaktive Element in mehrere leichtere Elemente (sodass aus einem Atom des Elements durch Teilung 0 werden). Es handelt sich daher nicht um eine Zunahme sondern um eine Abnahme um 10%. Das heißt nach 20 Sekunden ist die Anzahl der Zellen nicht eZ(0) sondern nur noch $\frac{Z(0)}{e} = e^{-1}Z(0)$, nach einer Stunde überhaupt nur noch $e^{-180}Z(0)$.

Die Exponentialfunktion wird überhaupt nie 0, sondern sie nähert sich nur immer näher dem Wert 0 an. Das entspricht der Tatsache, dass es nie 100% sicher ist, dass ein Teilchen zerfällt, sondern in unserem Beispiel immer nur 10%. Deshalb kann man bei radioaktiven Zerfällen immer nur die Halbwertszeit und nicht die absolute Zerfallszeit angeben.

4.b.i. Damit bei der zweiten Ableitung der Proportionalitätsfaktor -k ist, muss bei jeder Ableitung der Proportionalitätsfaktor $\sqrt{-k} = \pm i\sqrt{k}$ sein. Die zwei offensichtlichsten Lösungen sind daher $x(0)e^{i\sqrt{k}t}$ und $x(0)e^{-i\sqrt{k}t}$. Das x(0) kann sich jedoch auch beliebig auf die beiden Lösungen aufteilen. Die allgemeinste Lösung ist daher $x_1(0)e^{i\sqrt{k}t} + x_2(0)e^{-i\sqrt{k}t}$. Die intuitive Bedeutung dieser Kurve wird in Beispiel 4.b.ii. klar.

4.b.ii.I. Bei der maximalen Auslenkung ist x(0)=A mit der Amplitute A und x'(0)=0. Diese Beziehungen muss man in die allgemeine Lösung einsetzen, um die physikalische Bedeutung von $x_1(0)$ und $x_2(0)$ zu berechnen.

Einsetzen der ersten Beziehung in die allgemeine Lösung

$$x_1(0) + x_2(0) = A \tag{4.5}$$

Ableiten der allgemeinen Lösung

$$x'(t) = i\sqrt{k}x_1(0)e^{i\sqrt{k}t} - i\sqrt{k}x_2(0)e^{-i\sqrt{k}t} \tag{4.6}$$

Einsetzen der zweiten Beziehung

$$i\sqrt{k}x_1(0) - i\sqrt{k}x_2(0) = 0 \Rightarrow x_1(0) = x_2(0) \tag{4.7}$$

Man kann daher in 4.5. entweder $x_1(0)$ statt $x_2(0)$ oder $x_2(0)$ statt $x_1(0)$ einsetzen. Dadurch zeigt sich, dass beide Konstanten $\frac{A}{2}$ sind. Es ergibt sich somit die Lösung

$$x(t) = \frac{A}{2}(e^{i\sqrt{k}t} + e^{-i\sqrt{k}t}) \tag{4.8}$$

4.b.ii.II. Bei der Gleichgewichtslage ist x(0)=0 und x'(0)=A$\sqrt{k}$. (Bei der Amplitute ist die Geschwindigkeit 0, dann nimmt diese pro Meter um $\sqrt{k}$ zu, sodass sie am Ende der A Meter langen Amplitute A$\sqrt{k}$ beträgt). Die weitere Rechnung ist analog wie oben:

Einsetzen der ersten Beziehung in die allgemeine Lösung

$$x_1(0) + x_2(0) = 0 \Rightarrow x_1(0) = -x_2(0) \tag{4.9}$$

Ableiten der allgemeinen Lösung

$$x'(t) = i\sqrt{k}x_1(0)e^{i\sqrt{k}t} - i\sqrt{k}x_2(0)e^{-i\sqrt{k}t} \tag{4.10}$$

Einsetzen der zweiten Beziehung

$$i\sqrt{k}x_1(0) - i\sqrt{k}x_2(0) = Akx \Rightarrow x_1(0) - x_2(0) = \frac{A}{i} \tag{4.11}$$

Man kann laut 4.9. in 4.11. entweder $-x_1(0)$ statt $x_2(0)$ oder $-x_2(0)$ statt $x_1(0)$ einsetzen. Dadurch zeigt sich, dass $x_1(0) = \frac{A}{2i}$ und $x_2(0) = -\frac{A}{2i}$ gilt. Die allgemeine Lösung ist daher

$$x(t) = \frac{A}{2i}(e^{i\sqrt{k}t} - e^{-i\sqrt{k}t}) \tag{4.12}$$

4.b.ii.III. Die Schwingung, die bei der maximalen Auslenkung A beginnt, entspricht der Cosinusfunktion mit der Amplitute A. Kürzen durch $\frac{A}{2}$ ergibt die Beziehung

$$2cos(x) = e^{ix} + e^{-ix} \tag{4.13}$$

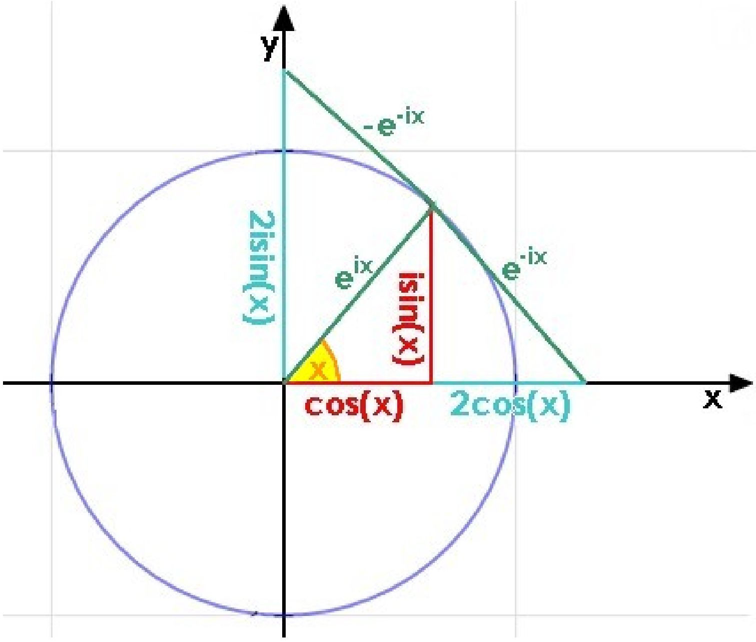
Die Schwingung, die bei der Gleichgewichtslage beginnt, entspricht der Sininusfunktion mit Amplitute A. Kürzen durch $\frac{A}{2i}$ ergibt

$$2isin(x) = e^{ix} - e^{-ix} \tag{4.14}$$

Addition der beiden Formeln und Division durch 2 ergibt die sogenannte Eulersche Formel:

$$cos(x) + isin(x) = e^{ix} \tag{4.15}$$

Das ermöglicht es uns, alles was wir gerechnet haben, in die komplexe Ebene einzuzeichnen.



4.b.ii.IV.α. Eulersche Formel (4.14.) Der cos(x) (rot) und isin(x) (rot) sind Ankathete und Gegenkathete eines Dreiecks mit Winkel x (gelb). Der Faktor e^{ix} (ergibt sich durch Addition dieser Vektoren) ist folglich die Hypothenuse (grün). Das erklärt auch, warum bei der Polardarstellung einer komplexen Zahl meist der Winkel in die Potenz geschrieben wird.

4.b.ii.IV.β. Cosinusformel (4.12.): Wenn man an den Vektor aus 4.14. e^{ix} (grün) durch Addition den selben Vektor mit einem negativen Winkel e^{-ix} (grün) hängt, hebt sich der Imaginärteil (isin(x)) (rot) auf und der Realteil (cos(x)) (rot) verdoppelt sich zur Länge 2cos(x) (türkis)

4.b.ii.IV.γ. Sinusformel (4.13.): Wenn man an den Vektor e^{ix} (grün) $-e^{-ix}$ (grün) anhängt, passiert genau das Gegenteil: Der Realteil (cos(x)) (rot) hebt sich auf und der Imaginärteil (isin(x)) (rot) verdoppelt sich zu 2isin(x) (türkis)

4.b.ii.IV.δ. Allgemeine Lösung: Bei der allgemeinen Lösung ist der Radius des Einheitskreises (blau) gleich der Hälfte der Amplitute ($\frac{A}{2}$). Der Winkel x (gelb) ist λt. Der Schnittpunkt der grünen Linien fährt also gewissermaßen mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit λ am Einheitskreis entlang.

Die Lösung mit t=0 bei der maximalen Amplitute ist die türkise Linie auf der reellen Achse. Dadurch, dass sich der Imaginärteil heraushebt, ist die Sinusfunktion reell. Dadurch, dass sich der Realteil verdoppelt ist die Amplitute A.

Die Lösung mit t=0 bei der maximalen Geschwindigkeit ist die türkise Linie auf der komplexen Achse. Dadurch, dass sich der Realteil heraushebt, ist die auftretende Funktion rein imaginär. Dadurch, dass sich der Imaginärteil verdoppelt, ist die Amplitute $\frac{A}{i}$. Multiplikation der Funktion mit i führt auf die rein reelle Cosinusfunktion.

5 Eulersche Identität

Wenn man in die Eulersche Formel einen Winkel von 180° (π Bogenmaß) einsetzt, erhält man die Formel

$$e^{i\pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0 \tag{5.1}$$

Viele Mathematiker finden diese Formel besonders schön, weil darin nur die fünf wichtigsten mathematischen Konstanten: 0, 1, π, e und i vorkommen. Eine tiefere physikalische oder mathematische Bedeutung (abgesehen vom Zeitpunkt der Schwingung, bei dem die Feder maximal nach unten ausgelenkt ist, falls die Federkonstante 1 ist) steckt jedoch nicht dahinter.