Die Mathematik an der Universität erscheint einem oft gerade im ersten Semester unnötig kompliziert und abstrakt. Dieses Skriptum versucht den Sinn hinter der Abstraktion mathematischer Formulierungen zu motivieren.

An vielen Stellen in diesem Skriptum sind Fragen gefolgt von Seitenumbrüchen. Es wird empfohlen an diesen Stellen vor dem Weiterlesen zuerst über die Antwort der Frage nachzudenken.

Beispiel: Ein Studienanfänger bekommt folgendes Beispiel

1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + 1/7 - …. = ?

Der Studienanfänger versucht die Lösung zunächst abzuschätzen, indem er Teile der Folge zusammenzählt:

1 - 1/2 + 1/3	-1/4 + 1/5	-1/6 + 1/7	-1/8 + 1/9	….	
5/6	<0	<0	<0	<0	<5/6

Nachdem er eine obere Grenze gefunden hat, zählt er die Summanden in einer anderen Reihenfolge zusammen, um eine untere Grenze zu erhalten

1 - 1/2 + 1/3	+1/5 + 1/7 - 1/4	+1/9 + 1/11 - 1/6	….	
5/6	>0	>0	>0	>5/6

Damit hat der Studienanfänger zwei Lösungen, die sich widersprechen. Welchen Fehler hat er gemacht?

Lassen Sie sich nicht demotivieren, falls sie den Fehler nicht gefunden haben: Den überaus meisten Erstsemestrigen geht es so. Um zu sehen welchen Fehler wir übersehen haben, schauen wir uns eine leichtere Summe an.

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - … = ?

Wie man leicht sieht ist die Summe dieser Reihe 0

1 - 1	+ 1 - 1	+ 1 - 1	+ 1 - 1	….	
0	0	0	0	0	0

Um eine obere Abschätzung zu bekommen, hat der Studienanfänger die Reihenfolge der Summanden so umgeordnet, dass der negative Teil dem positiven hinterherhinkt (Nachdem er 6 positive Summanden summiert hat, hat er erst 4 negative Summanden summiert, Nachdem er 8 positive Summanden summiert hat, hat er erst 5 negative Summanden summiert und so weiter). Umgelegt auf unsere neue Reihe hat er ungefähr das gemacht

1 + 1 - 1	1 + 1 - 1	1 + 1 - 1	….	
1	1	1	∞	∞

Wenn man solche Fehler beim Beweisen eines Satzes macht, ist das natürlich ein Problem für einen Mathematiker, weil er so mitunter Sätze beweisen kann, die gar nicht stimmen. Ein guter Mathematiker muss also den Fehler selbst dann sehen, wenn es dadurch nicht zu einem Widerspruch kommt.

Das gelingt erfahrungsgemäß den wenigsten Studienanfängern und selbst die wenigen, die den Fehler schon gesehen haben, bevor in der Frage der Widerspruch aufgedeckt wurde, dürfen sich nicht entspannt zurücklehnen, denn die Mathematik wird noch schwieriger.

Wie kann der Mathematiker solche Fehler verhindern?

An dieser Stelle kann jeder Leser selbst hinterfragen, was er gedacht hat, als der Studienanfänger den Fehler gemacht hat. Die meisten wahrscheinlich „Das ist eh logisch“, manche haben es vielleicht mit mathematisch unvollständigen Beweisen wie „Das geht aufgrund der Kommutivität“ oder „Es werden weiterhin alle Summanden zusammengezählt“ motiviert.

Um solche Fehler nicht zu machen, muss man seine Denkweise verändern. „Das ist eh logisch“ gilt nicht mehr als Begründung für einen Umformungsschritt, selbst wenn es sich um eine so offensichtliche Umformung wie $a \times 0 = 0$ handelt. In 99% der Fälle trifft zwar eh das logische zu, aber wir haben erfahren, dass es auch Ausnahmen gibt.

Damit wir anfangen können, alles was wir in der Mathematik brauchen herzuleiten, müssen wir 9 Eigenschaften der Addition und der Multiplikation definieren, die so genannten Vektorraumaxiome.

	Addition	**Multiplikation**
Kommutivität	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
Assoziativität	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$
Neutrales Element	$a + 0 = a$	$a \times 1 = a$
Inverses Element	$a + (-a) = 0$	$a \times 1/a = 1$
Distributivität	$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$	

Nur mit diesen 9 Axiomen kann man alle mathematischen Gesetze beweisen. Das wollen wir zur Übung anhand von 4 einfachen Beispielen durchführen.

1a: $0 + a = a$

1b: $a \times 0 = 0$

1c: $(0 + a) \times 1 + (-a) = 0$

1d: $(a + 0) \times a = a^2$

Lösung 1a

Neutrales Element der Addition	a + 0 = a
Kommutivität der Addition	0 + a = a

Lösung 1b

Neutrales Element der Multiplikation	a x 1 = a
Neutrales Element der Addition	a x (0 + 1) = a
Distributivgesetz	a x 0 + a x 1 = a
Neutrales Element der Multiplikation	a x 0 + a = a
Neutrales Element der Adition	a x 0 + a = 0 + a
Subtraktion von a	a x 0 = 0

Streng genommen müssen wir für den letzten Schritt erst beweisen, dass b + a = c + a nur dann gilt, wenn b = c ist. In streng mathematischen Büchern wird auch das bewiesen.

Lösung 1c

Inverses Element der Addition	a + (-a) = 0
Neutrales Element der Addition	0 + a + (-a) = 0
Neutrales Element der Multiplikation	0 + 1 x a + (-a) = 0
Lösung 1b	1 x 0 + 1 x a + (-a) = 0
Distributivität	1 x (0 + a) + (-a) = 0
Kommutivität der Multiplikation	(0 + a) x 1 + (-a) = 0

Hier verwenden wir die Lösung 1b um den Rechenweg abzukürzen. Das dürfen wir machen, denn wir könnten an dieser Stelle auch die Schritte aus Lösung 1b einfügen.

Lösung 1d

Neutrales Element der Addition	a + 0 = a
Multiplikation mit a	(a + 0) x a = a x a
Umschreiben der Lösung	(a + 0) x a = a^2

Für den letzten Schritt wird kein Beweis benötigt. Warum nicht?

a^2 ist eine Schreibweise um a x a kürzer darzustellen. Diese Schreibweise haben sich Mathematiker irgendwann ausgemacht, sie beruht auf keinen mathematischen Tatsachen.

Solche Abkürzungen bezeichnet man als Definitionen. Wenn man eine Aussage beweisen will, muss man sich bei jedem Schritt überlegen, ob es sich dabei um einen Satz (In diesem Fall muss man einen Beweis dafür angeben können) oder eine Definition handelt.

Streng mathematische Bücher bestehen nur aus Definitionen, Sätzen und zugehörigen Beweisen. In weniger mathematischen Büchern kommen auch folgende Teile vor:

Korollar: Ein Satz der so offensichtlich ist, dass der Beweis weggelassen wird. Der Leser sollte im Stande sein, selbst auf den Beweis zu kommen.

Beweisskizze/Beweisidee: Ein Beweis, in dem Schritte übersprungen werden. Der Leser sollte im Stande sein, selbst auf die übersprungenen Schritte zu kommen.

Motivation: Es wird vorweg genommen, wozu man die Definition bzw. den Satz später verwenden wird. (Mit dieser Motivation könnte der Mathematiker den Satz bzw. die Definition definiert haben).

Beispiele: Es werden Beispiele angegeben, wie man den Satz bzw. die Definition verwenden kann.

Handelt es sich bei folgenden Aussagen um Sätze oder Definitionen?

2a: $2 \times a = 2a$

2b: $a + a = 2a$

2c: $0 = -0$

2d: $a + (-b) = a - b$

Lösung 2a: Das man das Zeichen für die Multiplikation weglassen kann, hat man sich ausgemacht, es ist also eine Definition

Lösung 2b: Die zweite Angabe wirkt zwar analog wie $a \times a = a^2$, ist aber dennoch keine Definition. Für die Multiplikation haben wir im Gegensatz zur Potenzrechnung bereits Eigenschaften definiert (rechte Spalte bei den Vektorraumaxiomen) und wir müssen beweisen, dass die so erhaltene Multiplikation diese Eigenschaften erfüllt

Lösung 2c: Auch das ist keine Definition sondern ein Satz. Er folgt aus der Kommutivität der Addition $(-0) + 0 = 0 \Rightarrow 0 + (-0) = 0$ und der Eindeutigkeit des neutralen Elements

Lösung 2d: In Aufgabe 2d wird die Subtraktion definiert. Die Eigenschaften der Subtraktion haben wir genauso wie die Eigenschaften der Potenzrechnung nicht in den Vektorraumaxiomen definiert. Diese können mit Hilfe der Vektorraumaxiome hergeleitet werden, indem man die Definition einsetzt und dann die Vektorraumaxiome verwendet.

Leite mit Hilfe der Definition der Subtraktion und der Vektorraumaxiome folgende Beziehungen her

3a: $a - a = 0$

3b: $a - 0 = a$

Überlege dir eine geeignete Definition für die Division um folgende Beziehungen herzuleiten

4a: $a/a = 1$

4b: $a/1 = a$

Lösung 3a: Bei Aufgabe 3a führt das Einsetzen der Definition direkt zu einem Vektorraum-axiom a + (-a) = 0

Lösung 3b: Bei Aufgabe 3b erhält man durch Einsetzen der Definition a + (-0) = a. Hier benötigen wir Lösung 2c um das Vektorraumaxiom a + 0 = a zu erhalten.

Lösung 4: Beim Formulieren einer Definition muss man auf zwei Dinge achten: Erstens darf man keine Begriffe einbauen, die man noch nicht definiert hat, zweitens formuliert man sie sinnvollerweise so, dass man leicht durch Einsetzen in die Definition Beweise durchführen kann.

Die Definition a/b = a x 1/b erfüllt beides. Erstens haben wir sowohl die Multiplikation (x) als auch das inverse Element (1/b) bereits über die Vektorraumaxiome definiert und zweitens können wir mit dieser Definition die Aufgaben 4a und 4b analog zu 3a und 3b ausführen.

Alle Begriffe und Rechenoperationen können auf diese Art definiert werden. Oft erscheinen die Erklärungen dadurch unnötig abstrakt, aber man kann sie leichter in Beweisen verwenden.

Eine besonders wichtige Definition ist die Definition einer Abbildung. Eine Abbildung ist eine Zuordnung von Elementen einer Menge in eine andere Menge.

Überlege dir möglichst viele und möglichst unterschiedliche Beispiele für Abbildungen.

Tipp: Sind folgende Objekte Abbildungen?

1: Funktionen

2: Reihen

3: Rechenoperationen (allgemein)

Versuche auch das Pferd von hinten aufzuzäumen und überlege dir was keine Abbildungen sind.

1: Alle Funktionen sind Abbildungen. Beispielsweise ist die Funktion $f(x)=x^2$ eine Abbildung von den reelen Zahlen auf die positiven reelen Zahlen

2: Alle Reihen sind Abbildungen. Beispielsweise ist die Folge 2, 4, 6, 8, ... eine Abbildung von den natürlichen Zahlen auf die positiven geraden Zahlen mit der Bedingung $R(x)=2x$

3: Jede Rechenoperation ist eine Abbildung. Beispielsweise ist die Addition eine Abbildung von der Menge aller Zahlenpaare in die Menge der reelen Zahlen mit der Bedingung $O(a,b) = a + b$

Man erkennt, dass man jede mathematische Veränderung als Abbildung definieren kann. Nur statische Objekte wie Zahlen, Mengen oder Vektoren kann man nicht als Abbildung definieren.

Man unterscheidet zwischen surjektiven, injektiven und bijektiven Abbildungen. Bei surjektiven Abbildungen wird jedem Element der Bildmenge mindestens ein Element der Urbildmenge zugeordnet, bei einer injektiven Abbildung maximal ein Element und bei einer bijektiven Abbildung genau ein Element.

Sehr oft ist es sinnvoll, eine Eigenschaft mittels Abbildungen zu definieren. Hier zur Motivation ein Beispiel:

Man bezeichnet eine Menge als abzählbar unendlich, wenn die Menge zwar unendlich viele Elemente hat, man aber zu jedem Element in endlicher Zeit hinzählen kann. Beispielsweise sind die natürlichen Zahlen abzählbar unendlich. Ein weiteres Beispiel für eine abzählbar unendliche Menge sind die ganzen Zahlen, denn man kann auch 0, 1, -1, 2, -2, … zählen und so jede Zahl erreichen.

Definiere den Begriff „abzählbar unendlich" so, dass du beweisen kannst, dass die ganzen Zahlen abzählbar unendlich sind.

Eine Menge ist abzählbar unendlich, wenn eine bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf die Menge existiert

Diese Definition entspricht genau der anschaulichen Erklärung, hat aber den Vorteil, dass man den Beweis, dass eine Menge abzählbar unendlich ist, einfach durchführen kann, indem man ein Beispiel für so eine Abbildung angibt. Ein passendes Beispiel ist das oben beschriebene.

Versuche nun folgende mathematische Formulierungen anschaulich zu verstehen

5a: Es existiert eine bijektive Abbildung von der Menge {1,2,3} auf die Menge

5b: Es existiert eine surjektive Abbildung von der Menge {1,2,3} auf die Menge

5c: Es existiert eine bijektive Abbildung von den ganzen Zahlen auf die Menge

5d: Es existiert eine injektive Abbildung von den natürlichen Zahlen auf die Menge

5a: Die Menge hat genau 3 Mitglieder: Einem wird die Zahl 1, einem die Zahl 2 und einem die Zahl 3 zugeordnet

5b: Die Menge hat 1 - 3 Mitglieder: Einem Mitglied muss die Zahl 1, einem Mitglied die Zahl 2 und einem Mitglied die Zahl 3 zugeordnet werden. Da diese nicht unbedingt unterschiedlich sind, können es auch weniger sein. Die leere Menge ist jedoch ausgeschlossen.

5c: Die Menge ist abzählbar unendlich. Ob die bijektive Abbildung von den natürlichen Zahlen oder von den ganzen Zahlen ausgeht ist unerheblich, weil man jeder ganzen Zahl bijektiv eine natürliche Zahl zuordnen kann und somit auch eine bijektive Abbildung zwischen den natürlichen Zahlen und der Menge existiert.

5d: Die Menge ist unendlich, denn es gibt unendlich viele natürliche Zahlen und jeder wird mindestens ein Element der Menge zugeordnet. Da jeder natürlichen Zahl auch unendlich viele Elemente zugeordnet werden können, ist die Menge nicht zwangsweise abzählbar unendlich.

In dieser Aufgabe haben wir bemerkt, dass sehr viele unterschiedliche Aussagen mit nur sehr wenigen unterschiedlichen Formulierungen ausgedrückt werden können. Es ist also eine große Zeitersparnis, wenn man sich für diese wenigen Formulierungen Abkürzungen überlegt. Eine kleine Auswahl solcher Abkürzungen ist in folgender Tabelle dargestellt.

Es existiert	$\exists$
Es existiert genau eins	$\exists!$
Es existiert kein	$\nexists$
Für alle	$\forall$
Abbildung von A nach B	$A \rightarrow B$
Aus A folgt B	$A \Rightarrow B$
Für die gilt	$\mid$
(so dass) gilt	$:$
Element	$\in$
Kein Element	$\notin$
und	$\wedge$
oder	$\vee$

Versuche die Aussagen 5a - 5d mit möglichst wenigen Worten zu erklären. Nenne dabei die Menge A!

5a: $\forall\, y \in A\ \exists!\, x: a(x)=y\ x \in \{1,2,3\}$

5b: $\forall\, y \in A\ \exists\, x: a(x)=y\ x \in \{1,2,3\}$

5c: $\forall\, y \in A\ \exists!\, X \in \mathbb{Z}: a(x)=y$

5d: $\forall\, x, y \in \mathbb{N}: a(x)=a(y) \Longrightarrow x=y$

Im Beispiel 5d ist unerheblich, ob 0 zu den Natürlichen Zahlen zugeordnet wird oder nicht. Da die natürlichen Zahlen nicht klar definiert sind, ist empfehlenswert, in den Fällen wo die 0 dabei sein muss $\mathbb{N}_0$ und in den Fällen, wo sie nicht dabei sein darf $\mathbb{N}_+$ zu schreiben.

Ich hoffe es ist klar geworden, wieso die Erklärungen in der höheren Mathematik oft so abstrakt formuliert sind. Im Buch „Mathe-Basics zum Studienbeginn“ können solche Definitionen an vielen weiteren Beispielen geübt und angewendet werden. Im Buch „Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1“ und der Fortsetzung „Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2“ werden alle wichtigen Sätze aus Analysis und Linearer Algebra sowohl anschaulich als auch mathematisch erklärt.

Titel	Für Studenten der Uni Wien (gratis)	Für Interessierte (Vorschau + kaufen)
Mathe-Basics zum Studienbeginn	Link	Link
Tutorium Analysis 1 und Lineare Algebra 1	Link	Link
Tutorium Analysis 2 und Lineare Algebra 2	Link	Link

Alle Angaben in diesem Skriptum sind ohne Gewähr. Jedes Feedback hilft, die vorliegenden und künftigen Skripten zu verbessern.