

Theoretische Physik

Prinzip der stationären Wirkung

Die Physik entwickelte sich in mehreren Schritten.

Der erste Schritt passierte schon, bevor man es überhaupt Physik genannt hat: Es ist die physikalische Erfahrung. Beispielsweise macht man im Alltag sehr oft die Erfahrung, dass Gegenstände hinunterfallen. In seinem Kopf verallgemeinerte man das zum „physikalischen Gesetz“, dass Gegenstände immer hinunterfallen.

Der zweite Schritt ist, dass man physikalische Vorgänge ausprobiert. Man nennt ihn Experimentalphysik. Man lässt beispielsweise Dinge mit Absicht fallen und kann dadurch viel genauere Aussagen über den Vorgang machen, zum Beispiel dass die Gegenstände mit rund $10m/s^2$ in Richtung Erdmittelpunkt beschleunigen.

Man kann das Experiment mit unterschiedlichen Gegenständen an unterschiedlichen Orten der Erde wiederholen und misst immer eine Beschleunigung von ungefähr $10m/s^2$. Wenn man genug derartige Experimente gemacht hat, verallgemeinert man das wieder zu einem physikalischen Gesetz: Alle Gegenstände beschleunigen mit rund $10m/s^2$.

Der dritte Schritt ist, dass man aufgrund von theoretischen Überlegungen auch herausfindet, wie sich die physikalischen Gesetze unter Bedingungen verhalten, die man experimentell nicht herstellen kann. Man nennt ihn theoretische Physik. Beispielsweise kann man aus den unterschiedlichen Bewegungen von Himmelskörpern auf das Newton'sche Gravitationsgesetz und die Massen der einzelnen Himmelskörper schließen. Man weiß dadurch sogar, wohin der Körper an irgendwelchen Orten beschleunigen würde, an die wir nur sehr schwer hinkommen würden, um Experimente zu machen.

Man erkennt, dass die theoretischen Überlegungen nicht immer mit den Verallgemeinerungen aus der Experimentalphysik und den Alltagserfahrungen übereinstimmen müssen, beispielsweise fallen laut dem Newton'schen Gravitationsgesetz nicht mehr alle Gegenstände mit rund $10m/s^2$ nach unten.

Nur in den Spezialfällen, unter denen die Experimente und Erfahrungen gemacht wurden, müssen diese weiterhin stimmen. Beispielsweise ist das physikalische Gesetz, dass alle Gegenstände mit rund $10m/s^2$ Richtung Erdmittelpunkt beschleunigen der Spezialfall in der Nähe der Erdoberfläche und wenn man genau genug misst, muss man auch feststellen, dass die Gegenstände am Gipfel des Mount Everest etwas langsamer beschleunigen als am Toten Meer, weil der Gipfel des Mount Everest weiter vom Erdmittelpunkt als das Tote Meer entfernt ist.

Ähnlich ist das bei allen Theorien die unserer Erfahrung widersprechen: Beispielsweise entspricht die Relativitätstheorie bei niedrigen Massen und Geschwindigkeiten unserer Alltagserfahrung, dass die Zeit immer gleich schnell vergeht. Wenn man genau genug misst, muss man auch bei kleinen Massen- und Geschwindigkeitsänderungen einen Unterschied feststellen.

Da keine experimentelle oder Alltagserfahrung, von einer Theorie unter allen Bedingungen erfüllt werden muss, drängt sich einem die Frage auf, was man überhaupt noch voraussetzen kann, um Theorien zu beweisen.

Die Antwort kann nur sein, dass man möglichst wenig Annahmen macht, denn jede Annahme birgt die Gefahr, nicht allgemein genug zu sein. Am besten wäre es daher, wenn man alles aus nur einer einzigen Formel, einer sogenannten Weltformel herleiten könnte.

Auf den ersten Blick würde man meinen, dass so eine Formel ungeheuer kompliziert sein müsste, schließlich gibt es unzählige unterschiedliche physikalische Eigenschaften. Wenn man jedoch genauer überlegt, lässt sich jede Eigenschaft auf die Bewegung von Teilchen zurückführen. Beispielsweise ist die Temperatur die Anzahl von Teilchenstößen, die Farbe die Wellenlänge der reflektierten Lichtteilchen etc. Die Weltformel muss also erklären, wieso sich die Teilchen in welche Richtung bewegen.

Laut zweitem Newton'schen Gesetz behalten Teilchen ihre Geschwindigkeit fast immer bei. Es gibt nur vier Ausnahmen, bei denen die Teilchen ihre Geschwindigkeit ändern (also beschleunigen). Diese Ausnahmen werden Kräfte genannt. Man unterscheidet die Gravitation, den Elektromagnetismus, die schwache Kernkraft und die starke Kernkraft.

Das ist die Stelle, an der die Vereinheitlichung zu einer Weltformel scheitert. Man hat zwar schon geschafft, einige Kräfte auf eine gemeinsame Ursache zurückzuführen (zum Beispiel Elektrizität und Magnetismus auf den Elektromagnetismus), die Vereinheitlichung aller Kräfte jedoch noch nicht.

Immerhin gibt es einige Eigenschaften, die für alle Kräfte gleichermaßen gelten, wodurch wir uns einer Weltformel weiter annähern können.

Jede Kraft führt per Definition eine Beschleunigung aus. Wenn sich das Teilchen in Richtung der Beschleunigung bewegt, führt diese dazu, dass seine Geschwindigkeit zunimmt, wenn es sich entgegengesetzt dazu bewegt, führt dieselbe Beschleunigung zu derselben Abnahme der Geschwindigkeit. Insgesamt kann man jedem Teilchen, solange man die Geschwindigkeit dieses Teilchens an einer Stelle kennt, innerhalb eines Kraftfelds, für jede weitere Stelle eine Geschwindigkeit zuordnen.

Normalerweise trägt man in diesem Kraftfeld nicht die Geschwindigkeit, sondern die kinetische Energie auf. Die kinetische Energie ist definiert als

$$E_{kin} = \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

Man kann sich auch fragen, wie stark die kinetische Energie des Teilchens innerhalb

des Kraftfelds potentiell ansteigen kann, das heißt um wie viel größer die kinetische Energie an der Maximumstelle des Potentialfeldes ist. Diese zusätzlich mögliche kinetische Energie wird als potentielle Energie bezeichnet.

Die Formel für die potentielle Energie erhält man, indem man die Kraft an jeder Stelle nach dem Radius integriert

$$E_{pot} = \int F(r) dr \quad (2)$$

An der Stelle mit der maximalen kinetischen Energie ist das Potential 0, an den anderen Stellen die fehlende kinetische Energie mit einem Minus als Vorzeichen.

Wenn man diese fehlende kinetische Energie zur aktuellen kinetischen Energie dazuaddiert (also die potentielle Energie von der kinetischen Energie abzieht) erhält man immer die maximal mögliche kinetische Energie. Diese bleibt konstant und man bezeichnet sie als Wirkung mit dem Buchstaben S

$$E_{kin} - E_{pot} = S = const. \quad (3)$$

Diese Formel bezeichnet man als Prinzip der stationären Wirkung, weil die Wirkung konstant (also stationär) ist.

Sie wurde nicht hergeleitet, sondern es wurde aufgrund von bisherigen Experimenten und Erfahrungen (z.B. 2. Newton'sches Gesetz) überlegt, welches Gesetz man an den Anfang stellen kann, um alle anderen Gesetze herzuleiten. Die Formel ist in dieser Hinsicht analog zu den Vektorraumaxiomen in der Mathematik.

Wenn man wüsste, welche allgemeine Formel man für $F(r)$ in den Teil mit der potentiellen Energie einsetzt, wäre es eine Weltformel. So hat man gewissermaßen 4 Weltformeln (für jede der 4 Wechselwirkungen eine). Da diese Formeln sehr ähnlich sind, arbeitet man meistens mit der allgemeinen Formel.

Im nächsten Kapitel wird die Variationsrechnung eingeführt. Mit deren Hilfe kann man aus dem Prinzip der stationären Wirkung die Lagrange-Gleichungen herleiten. Diese ermöglichen es, für beliebige Systeme Bewegungsgleichungen (also Gleichungen bei denen der Ort des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt wird) aufzustellen. Man kann jeden physikalischen Vorgang als Bewegung unzähliger Teilchen auffassen und damit durch das Aufstellen sehr vieler Bewegungsgleichungen im Prinzip jedes physikalischen Gesetzes herleiten.

Übungsaufgabe

Leite das 3. Kepler'sche Gesetz aus dem Prinzip der stationären Wirkung her. Setze die Planetenbahn als näherungsweise kreisförmig voraus.

Lösung

Prinzip der stationären Wirkung

$$E_{kin} - E_{pot} = const. \quad (4)$$

Einsetzen der Formeln für die kinetische und die potentielle Energie

$$\frac{mv^2}{2} - \int F(r) = const. \quad (5)$$

Einsetzen der Formel für die Gravitationskraft in $F(r)$

$$\frac{mv^2}{2} - \int \frac{GMm}{r^2} = const. \quad (6)$$

Berechnung der Stammfunktion

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{GMm}{r} = const. \quad (7)$$

Multiplikation mit r (bei einer Kreisbahn konstant)

$$\frac{mv^2r}{2} + GMm = const. \quad (8)$$

Subtraktion des konstanten Terms GMm

$$\frac{mv^2r}{2} = const. \quad (9)$$

Division durch den konstanten Term $\frac{m}{2}$

$$v^2r = const. \quad (10)$$

Die Periodendauer ist der Umfang des Kreis durch die Geschwindigkeit

$$P = \frac{U}{v} \quad (11)$$

Einsetzen der Umfangformel

$$P = \frac{2r\pi}{v} \quad (12)$$

Multiplikation mit $\frac{v}{P}$

$$v = \frac{2r\pi}{P} \quad (13)$$

Einsetzen von Formel 13 in Formel 10

$$\frac{4r^3\pi^2}{P^2} = const. \quad (14)$$

Division durch den konstanten Term $4\pi^2$

$$\frac{r^3}{P^2} = const. \quad (15)$$

Da diese Konstante für alle Planeten gleich groß ist, gilt immer

$$\frac{r_1^3}{P_1^2} = \frac{r_2^3}{P_2^2} \quad (16)$$