Theoretische Physik

Variationsrechnung

Die Variationsrechnung ist die Verallgemeinerung der Extremwertaufgabe auf mehr als eine Dimension. Es wird jeder Funktion ein Wert zugeordnet (zum Beispiel jedem Weg der Betrag der Wirkungsänderung) und dann nach jener Funktion gesucht, bei der dieser Wert minimal ist (Hauptbedingung). Bei den meisten Anwendungen wird die Menge der Funktionen eingegrenzt, zum Beispiel indem man Anfangs- und Endwert vorgibt (Nebenbedingung).

Wenn man ein Teilchen sowohl am Anfangs- als auch am Endpunkt beobachtet hat, weiß man, dass die Wirkungsänderung auf dem Weg dazwischen 0 (und der Betrag der Wirkungsänderung entlang des Weges daher minimal) sein muss. Somit führt die Variationsrechnung dazu, dass man den Weg des Teilchens berechnen kann.

Wiederholung: Extremwertaufgabe

Bei der Extremwertaufgabe gibt es immer genau so viele Nebenbedingungen, dass in der Hauptbedingung nur noch eine Unbekannte überbleibt. Ein Beispiel für eine Extremwertaufgabe ist:

„Welches Rechteck hat bei einem vorgegebenen Umfang die größte Fläche?“

Der Wert der minimiert bzw. maximiert werden soll, ist die Hauptbedingung. In diesem Beispiel ist das die Fläche

$$AB = max. \tag{1}$$

Die Werte, die vorgegeben sind, sind die Nebenbedingungen. In diesem Beispiel gibt es eine Nebenbedingung: Den Umfang

$$2A + 2B = U \tag{2}$$

Man kann die Hauptbedingung als zweidimensionale Funktion auffassen, die allen A und B einen Wert zuordnet. Zunächst schränkt man diese auf jene eindimensionale Funktion ein, bei der die Anfangsbedingung erfüllt ist, zum Beispiel indem man für B=U-A (Nebenbedingung nach B umgeformt) einsetzt

$$2A(2U - 2A) = max. \tag{3}$$

Die Maximumstelle ist jene Stelle, bei der die Ableitung nach der verbleibenden Koordinate (A weil U konstant ist) 0 ist.

$$U - 4A = 0 \tag{4}$$

Umformung nach A ergibt

$$A = \frac{U}{4} \tag{5}$$

und Einsetzen in die Anfangsbedingung schließlich

$$B = \frac{U}{4} \tag{6}$$

Alle Seiten sind ein Viertel des Umfangs lang, man erhält also ein Quadrat.

Wenn man sich nicht sicher ist, ob es sich bei dem Ergebnis um die Maximum- oder um die Minimumstelle handelt, kann man noch die zweite Ableitung berechnen. Wenn diese positiv ist, handelt es sich um eine Minimumstelle, wenn diese negativ ist um eine Maximumstelle. In unserem Beispiel ist der Wert -2, also handelt es sich tatsächlich um eine Maximumstelle.

Übungsaufgabe 1

Welches Rechteck hat bei einer vorgegebenen Fläche den kleinsten Umfang?

Link zur Lösung

Verallgemeinerung: Variationsrechnung

Bei der Variationsrechnung hat man mitunter nicht ausreichend Nebenbedingungen, damit die zu extremierende Funktion nur noch von einer Unbekannten abhängt. Ein Beispiel für eine Variationsrechnung ist:

„Welches ist der kürzeste Weg zwischen 2 Punkten auf dem Mantel eines Zylinders?“

In diesem Beispiel ist die Hauptbedingung das Wegintegral zwischen dem Anfangspunkt A und dem Endpunkt E

$$\int_A^E \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt = min. \tag{7}$$

Die Nebenbedingung ist die Formel für den Kreis, weil man das Koordinatensystem so legen kann, dass der Zylinder in jeder xy-Ebene einen Kreis um den Ursprung darstellt.

$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{8}$$

An der Stelle hat man das Problem, dass man beim Umformen nach x oder y jeweils zwei Lösungen (die positive und die negative Wurzel) erhält und deshalb keine eindeutige Nebenbedingung in die Hauptbedingung einsetzen kann. Man muss daher eine andere Möglichkeit finden, um die Nebenbedingung in die Hauptbedingung zu inkludieren.

Erste Möglichkeit: Lagrange-Multiplikatoren

Bei dieser Methode muss man die Nebenbedingung zunächst so umformen, dass auf einer Seite eine Null steht. Das geht immer, indem man eine Seite der Gleichung von der anderen abzieht. Man kommt damit auf die Gleichung

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0 \tag{9}$$

Da jetzt die rechte Seite der Nebenbedingung gleich 0 ist, kann man die linke Seite (oder ein Vielfaches davon) zur Formel dazuzählen oder von der Formel abziehen, ohne dass sich die Formel ändert. Somit kommt man auf die allgemeinere Bedingung:

$$\int_A^E \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt + \lambda(x^2 + y^2 - r^2) = min. \tag{10}$$

In dieser Formel ist die ursprüngliche Hauptbedingung enthalten (der Spezialfall, dass $\lambda = 0$ gilt). Es ist auch die Möglichkeit enthalten, dass man ein Vielfaches der Nebenbedingung abzieht, weil λ negativ sein kann. Den Faktor λ nennt man Lagrange-Multiplikator.

Bei der Minimumstelle muss die Ableitung in jeder Richtung 0 sein. Die Koordinate nach der man ableitet, wir werden sie als ϵ bezeichnen, darf an jeder Stelle in jede beliebige Richtung gehen. Die Funktion $\eta(x, y, z)$ gibt an jeder Stelle an, in welche Richtung die ϵ-Koordinate geht. Damit der Weg minimal ist, muss die Ableitung nach ϵ für alle Funktionen $\eta(x, y, z)$ gleich 0 sein.

Hinzufügen der Variation jeder Koordinate in Richtung der Funktion $\eta(x)$ ergibt

$$\int_A^E \sqrt{(\dot{x} + \epsilon\dot{\eta})^2 + (\dot{y} + \epsilon\dot{\eta})^2 + (\dot{z} + \epsilon\dot{\eta})^2}dt + \lambda((x + \epsilon\eta)^2 + (y + \epsilon\eta)^2 - r^2) = min. \tag{11}$$

Die Konstante r wird nicht variiert, weil der Weg laut Angabe auf dem Zylindermantel bleiben muss. Dort wo die Koordinaten in der Gleichung abgeleitet vorkommen, wird auch die Variation mitabgeleitet. Die Koordinate ϵ wird dabei bereits als konstant angenommen, weil wir beim Ableiten nach ϵ sowieso nur eine infinitesimal kleine Änderung entlang der ϵ-Koordinate betrachten.

Die innerste Ableitung nach ϵ ist unabhängig von der Funktion bei jeder Koordinate η und bei jeder abgeleiteten Koordinate $\dot{\eta}$. Die äußere Ableitung ist die Ableitung der Funktion nach derjenigen Ortskoordinate, bei der η dazugezählt wurde. Da η

zu jeder Koordinate dazugezählt wurde, erhält man für jede Ortskoordinate q jeder Funktion f die Gleichung

$$\frac{\delta}{\delta\epsilon}\int_A^E f(q+\epsilon\eta)+f(\dot{q}+\epsilon\dot{\eta})dt = \int_A^E \frac{\delta f}{\delta q}\eta + \frac{\delta f}{\delta \dot{q}}\dot{\eta}dt = 0 \tag{12}$$

Der Buchstabe q steht für die verallgemeinerte Ortskoordinate, das heißt für diesen Buchstaben werden nacheinander die Buchstaben x, y und z eingesetzt, sodass man auf 3 Gleichungen kommt. Man kann aufgrund der Summenregel in jeder dieser 3 Gleichungen das Integral vor der Summe auseinanderziehen

$$\int_A^E \frac{\delta f}{\delta q}\eta dt + \int_A^E \frac{\delta f}{\delta \dot{q}}\dot{\eta}dt = 0 \tag{13}$$

Um η herauszuheben, integrieren wir nur das zweite Integral, wobei wir die partielle Integration so ausführen, dass $\dot{\eta}$ integriert wird.

$$\int_A^E \frac{\delta f}{\delta q}\eta dt + [\frac{\delta f}{\delta \dot{q}}\eta]_A^E - \int_A^E \frac{d}{dt}(\frac{\delta f}{\delta \dot{q}})\eta dt = 0 \tag{14}$$

Die Funktion η ist sowohl am Anfangspunkt A als auch am Endpunkt E immer 0, weil Anfangs- und Endpunkt vorgegeben sind. (An diesen Stellen kann man die Koordinaten nicht variieren). Dadurch fällt der mittlere Term sowohl beim Einsetzen von E, als auch beim Einsetzen von A weg und man erhält die kürzere Gleichung

$$\int_A^E \frac{\delta f}{\delta q}\eta dt - \int_A^E \frac{d}{dt}(\frac{\delta f}{\delta \dot{q}})\eta dt = 0 \tag{15}$$

Die einzige Koordinate, die wir noch nicht variiert haben, ist die Zeitkoordinate t (weil es nur eine Zeitrichtung gibt, braucht man in diese Richtung nicht variieren. Ableiten der Gleichung nach t führt dazu, dass das Integral in beiden Termen verschwindet.

$$\frac{\delta f}{\delta q}\eta - \frac{d}{dt}(\frac{\delta f}{\delta \dot{q}})\eta = 0 \tag{16}$$

Wenn die Funktion η 0 ist, ist die Ableitung nach ϵ immer 0, weil dann die Funktion gar nicht variiert wird. Wenn die Funktion η nicht 0 ist, darf man die Gleichung durch η dividieren und erhält die Gleichung

$$\frac{\delta f}{\delta q} - \frac{d}{dt}(\frac{\delta f}{\delta \dot{q}}) = 0 \tag{17}$$

Diese Gleichung wird als Euler-Lagrange-Gleichung bezeichnet.

Bei der Orts- und Geschwindigkeitsabeleitung handelt es sich um eine partielle Ableitung (das heißt eine Ortskoordinate, die von einer Geschwindigkeit abhängt oder eine Geschwindigkeitskoordinate die von einem Ort abhängt, wird als Konstante betrachtet).

Das liegt daran, dass dieser Teil der Formel ausschließlich von der äußeren Ableitung nach ϵ kommt, die inneren Ableitungen haben wir alle gekürzt.

Lediglich die Zeitableitung ist eine totale Ableitung (wenn Orte und Geschwindigkeiten nach der Zeit abgeleitet werden, fallen diese nicht weg sondern werden zu Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen).

Um die Euler-Lagrange-Gleichung auf Gleichung 9 anzuwenden, muss man diese zunächst nach allen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten ableiten

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2\lambda x \tag{18}$$
$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2\lambda y \tag{19}$$
$$\frac{\delta f}{\delta z} = 0 \tag{20}$$
$$\frac{\delta f}{\delta \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \tag{21}$$
$$\frac{\delta f}{\delta \dot{y}} = \frac{2\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \tag{22}$$
$$\frac{\delta f}{\delta \dot{z}} = \frac{2\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} \tag{23}$$

Einsetzen dieser Gleichungen in die Euler-Lagrange-Gleichung ergibt das Differentialgleichungssystem

$$2\lambda x - \frac{d}{dt}(\frac{2\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}) = 0 \tag{24}$$
$$2\lambda y - \frac{d}{dt}(\frac{2\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}) = 0 \tag{25}$$
$$-\frac{d}{dt}(\frac{2\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}) = 0 \tag{26}$$

Berechnen der Zeitableitungen ergibt die Lagrangegleichungen 1.Art

$$2\lambda x - \frac{2\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + \frac{2\dot{x}(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{27}$$
$$2\lambda y - \frac{2\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + \frac{2\dot{y}(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{28}$$
$$-\frac{2\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}} + \frac{2\dot{z}(2\dot{x}\ddot{x}+2\dot{y}\ddot{y}+2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{29}$$

Die Lagrangegleichungen sind Differentialgleichungen 2. Ordnung, die man erhält, wenn man Haupt- und Nebenbedingung in die Euler-Lagrange-Gleichungen einsetzt.

Im Allgemeinen kann man diese Gleichungen nicht lösen. Dieses Problem kann man umgehen, indem man Hamilton- statt Lagrangegleichungen aufstellt. (ein Skriptum über die Hamiltongleichungen ist in Planung)

Übungsaufgabe 2

Stelle die Lagrangegleichungen 1. Art für den kürzesten Weg auf einer Kugeloberfläche auf.

Link zur Lösung

Zweite Möglichkeit: Generalisierte Koordinaten

Die zweite Möglichkeit, wie man die Nebenbedingung in die Gleichung inkludiert, funktioniert, indem man die Koordinaten so legt, dass sie gar nicht in ein Gebiet führen, in dem die Nebenbedingungen nicht erfüllt sind.

Im obigen Beispiel geht das relativ leicht, weil man die Zylinderkoordinaten ϕ und z verwenden kann. Die r-Koordinate lässt man mit Absicht weg, weil die r-Koordinate auf der Zylinderoberfläche konstant ist und wir daher keine Variation entlang der r-Koordinate vornehmen wollen.

Im allgemeinen muss man sich überlegen, auf welchem Teilraum sich die Bewegung abspielen kann und dann Koordinaten wählen, die jede Stelle des Teilraums erreichen, aber nicht aus dem Teilraum hinausgehen. Das erfordert mitunter einiges an Vorstellungskraft.

Wenn man passende Koordinaten gefunden hat, ist der Rechenweg jedoch deutlich kürzer als mit Lagrange-Multiplikatoren: Man muss nach weniger Koordinaten ableiten und bekommt dadurch ein kleineres Differentialgleichungssystem.

Um die Hauptbedingung in den neuen Koordinaten anzugeben, benötigt man die passenden Umrechnungsformeln. In unserem Beispiel sind das die bekannten Umrechnungsformeln in Zylinderkoordinaten.

$$x(t) = Rcos\phi(t) \tag{30}$$
$$y(t) = Rsin\phi(t) \tag{31}$$
$$z(t) = z(t) \tag{32}$$

Der Faktor R ist dabei in dem Fall keine Koordinate sondern eine Konstante (Deshalb auch keine t-Abhängigkeit). Ableitung dieser Gleichungen nach t führt auf die Umrechnungsformeln für $\dot{x}$, $\dot{y}$ und $\dot{z}$

$$\dot{x}(t) = -Rsin\phi(t)\dot{\phi}(t) \tag{33}$$
$$\dot{y}(t) = Rcos\phi(t)\dot{\phi}(t) \tag{34}$$
$$\dot{z}(t) = \dot{z}(t) \tag{35}$$

Diese Formeln kann man in Gleichung 7 einsetzen, um diese in Zylinderkoordinaten darzustellen.

$$\int_A^E \sqrt{R^2 sin^2\phi\dot{\phi}^2 + R^2 cos^2\phi\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}dt \tag{36}$$

Herausheben des Faktors $r^2\dot{\phi}^2$ aus den ersten zwei Termen führt auf die Gleichung

$$\int_A^E \sqrt{R^2\dot{\phi}^2(sin^2\phi + cos^2\phi) + \dot{z}^2}dt \tag{37}$$

Der Faktor $sin^2\phi + cos^2\phi$ ist der Pythagoras am Einheitskreis. Dieser ergibt immer 1, sodass die Formel für das Wegintegral in Zylinderkoordinaten

$$\int_A^E \sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}dt \tag{38}$$

lautet.

An und für sich hätte man sich die Formel auch einfacher überlegen können: Die Zylinderkoordinaten stehen nach wie vor im rechten Winkel aufeinander, sodass man immer noch den Pythagoras anwenden kann. Nur die Änderung entlang der Winkelkoordinate muss man mit dem Radius multiplizieren, damit sie wie die anderen Einheiten in Meter und nicht in Bogenmaß skaliert werden.

Das Verständnis der Herleitung mit Hilfe der Umrechnungsformel ist dennoch sinnvoll, weil man manchmal auch kompliziertere Koordinaten verwenden muss, bei denen die Herleitung aus der Umrechnungsformel leichter ist.

Die Variation entlang der ϵ-Koordinate ist analog wie bei der Methode mit den Lagrange-Multiplikatoren, schließlich ist es egal, welche Hauptbedingung man variiert und in welchen Koordinaten man diese angibt. Man erhält dadurch dieselben Euler-Lagrange-Gleichungen in die man wie gewohnt die Hauptbedingung einsetzt.

Ableiten der Hauptbedingung nach allen Geschwindigkeitskoordinaten führt auf.

$$\frac{\delta f}{\delta\dot{\phi}} = \frac{R^2\dot{\phi}}{\sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} \tag{39}$$

$$\frac{\delta f}{\delta\dot{z}} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2}} \tag{40}$$

Die Ableitung nach den Ortskoordinaten ist 0, weil diese Unbekannten in der Gleichung nicht vorkommen. Einsetzen dieser Beziehungen in die Euler-Lagrange-Gleichungen ergibt

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{R^2\dot{\phi}}{\sqrt{R^2(\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}}\right) = 0 \tag{41}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{z}}{\sqrt{R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}}\right) = 0 \tag{42}$$

Bilden der zeitlichen Ableitungen führt auf die Lagrangegleichungen 2. Art

$$\frac{r^2\ddot{\phi}}{\sqrt{R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}} + \frac{R^2\dot{\phi}(2R^2\dot{\phi}\ddot{\phi}+2\dot{z}\ddot{z})}{(\sqrt{(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{43}$$

$$\frac{\ddot{z}}{\sqrt{R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2}} + \frac{\dot{z}(2R^2\dot{\phi}\ddot{\phi}+2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(R^2\dot{\phi}^2+\dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{44}$$

Das Lösen des Gleichungssystems würde auf dieselben Bewegungsgleichungen wie bei den Lagrangegleichungen 1. Art führen.

Übungsaufgabe 3

Stelle die Lagrangegleichungen 2. Art für den kürzesten Weg auf einer Kugeloberfläche auf.

Link zur Lösung

Anwendung: Prinzip der stationären Wirkung

Bei den bisherigen Beispielen haben wir jeder Funktion eine Länge zugeordnet. Man kann den Funktionen jedoch auch beliebige andere Werte (zum Beispiel die Wirkung) zuordnen. Man setzt dafür in die Hauptbedingung statt dem Wegintegral die Formel für die Wirkung ein.

$$\frac{mv^2}{2} + \int_A^E F(x)dx = \text{stationär} \tag{45}$$

Diese Formel nennt man Lagrangefunktion und man kürzt sie mit dem Buchstaben L ab. Wenn man die Variationsrechnung auf die Lagrangefunktion anwendet, bekommt man einen Weg, an dem die Wirkung minimal, maximal oder eine Sattelstelle (also stationär) ist. Da das Prinzip der stationären Wirkung laut unseren bisherigen Erfahrungen immer erfüllt ist, erhält man genau die physikalisch möglichen Wege.

Übungsaufgabe 4

Leite durch Anwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen auf die Lagrangefunktion die Formel für die Kraft her

Link zur Lösung

Zwangsbedingungen

Zwangsbedingungen sind das Analogon zu Nebenbedingungen. Diese treten dann auf, wenn eine Kraft (man nennt sie Zwangskraft) zu einer Einschränkung der Bewegungsmöglichkeiten führt.

Wenn man beispielsweise ein Pendel im Gravitationsfeld betrachtet, wirkt zusätzlich zur Gravitationskraft (die das Pendel zum Schwingen bringt) die Kraft des Fadens, die jeden Teil des Pendels auf einem konstanten Radius zum Aufhängepult hält.

Die Gravitationskraft führt zur Bewegung. Diese muss man daher als F(x) in das Prinzip der stationären Wirkung einsetzen. Im Gegensatz dazu führt die Kraft des Fadens nur zu einer Einschränkung der Bewegung. Sie ist daher eine Zwangskraft, die durch eine Zwangsbedingung angegeben wird.

Natürlich bedeutet das nicht, dass das Pendel immer hält. In tatsächlichen Anwendungen muss man erst messen, ob das Pendel alle auftretenden Kräfte aushält, bevor man die Lagrangegleichungen aufstellen kann.

Wenn man die Lagrangegleichungen 1. Art verwendet, addiert man gewissermaßen alle Kräfte. Bei den Kräften, die eine Bewegung auslösen, kennt man Beschleunigung und Richtung. Diese kann man ohne λ als Hauptbedingung addieren. Bei den Kräften, die die Bewegung einschränken, kennt man nur die Richtung. Diese muss man mit der unbekannten Variable λ multiplizieren.

Da man im Verlauf der Rechnung auch λ erhält, kann man die Stärke der Zwangskraft mit Hilfe der Lagrangegleichungen 1. Art ebenfalls berechnen. Diese muss immer genauso groß sein, dass sie die Kräfte, die den Körper aus der erzwungenen Bahn zu drücken versuchen, ausgleicht.

Wenn man die Lagrangegleichungen 2. Art verwendet, betrachtet man nur die Orte, auf denen sich das Pendel bewegen kann (also nur die Oberfläche der Kugel mit dem Mittelpunkt im Aufhängepunkt). Als Koordinaten kann man ϕ und θ in Kugelkoordinaten verwenden. Die Anzahl der notwendigen Koordinaten bezeichnet man als Freiheitsgrade, in diese Richtungen hat das Pendel gewissermaßen die Freiheit sich zu bewegen.

Es gibt auch Zwangskräfte, die man weder mit Hilfe von Lagrange-Multiplikatoren noch mit Hilfe von generalisierten Koordinaten in die Hauptbedingung integrieren kann. Diese werden als Anholonome Zwangsbedingungen bezeichnet und durch eine Ungleichung dargestellt.

Ein Beispiel für eine anholonome Zwangsbedingung ist ein Teilchen, das durch einen Boden vom Herunterfallen abgehalten wird. Wenn sich der Boden bei der Stelle z=0 befindet, lautet die Zwangsbedingung z>0.

Diese Zwangsbedingung kann man nicht zur Lagrangegleichung dazuzählen, weil auf der einen Seite der Gleichung immer auch etwas höheres als 0 stehen kann. Auch die Einführung von generalisierten Koordinaten ist nicht möglich, weil nicht die Anzahl der Koordinaten, sondern nur die Distanz entlang einer Koordinate durch die Zwangsbedingung eingeschränkt wird.

Man kann ein derartiges System nicht mit dem Lagrangeformalismus lösen, sondern benötigt Stoßgesetze und Elastizitätseigenschaften. Das Lösen der Bewegungsgleichung für anholonome Zwangsbedingungen geht über den Stoff des Skriptums hinaus.

Bei holonomen Zwangsbedingungen (also denen, die sich für den Lagrangeformalismus eignen) gilt, dass jede Zwangsbedingung einen Freiheitsgrad reduziert. Am Beginn hat jeder der beteiligten Körper drei Freiheitsgrade, die Zahl der Freiheitsgrade beträgt also immer 3K-Z, wobei K die Anzahl der beteiligten Körper und Z die Anzahl der Zwangsbedingungen darstellt.

Wenn man die generalisierten Koordinaten aufstellt, kann man sich überlegen, ob man ausreichend aber nicht zu viele Koordinaten angibt. Dadurch kann man vermeiden, dass man eine Koordinate oder eine Einschränkung vergisst.

Übungsaufgabe 5

Ein Körper rollt auf einer schiefen Ebene mit einer Neigung von 45° abwärts. Er ist auf einer Schiene eingespannt. Die Anordnung befindet sich in Erdnähe (Man darf die Gravitationsbeschleunigung als konstant mit g=10$\frac{m}{s^2}$ nach unten nähern). Berechne die Zwangskraft, die Freiheitsgrade und die Lagrangegleichungen

Link zur Lösung

Lösungen der Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Die Hauptbedingung ist die Umfangformel

$$A + B = min. \tag{46}$$

Die Nebenbedingung ist die Flächenformel

$$AB = F \tag{47}$$

Einsetzen der Nebenbedingung in die Hauptbedingung

$$A + \frac{F}{A} = max. \tag{48}$$

Ableitung nach A

$$1 - \frac{F}{A^2} = 0 \tag{49}$$

Umformung nach A

$$A = \sqrt{F} \tag{50}$$

Einsetzen von A in die Anfangsbedingung

$$\sqrt{F}B = F \tag{51}$$

Umformung nach B

$$B = \sqrt{F} \tag{52}$$

Berechnung der zweiten Ableitung

$$\frac{2F}{A^3} > 0 \tag{53}$$

$A = B = \sqrt{F}$ ist eine Minimumstelle

Übungsaufgabe 2

Die Hauptbedingung ist wieder das Wegintegral

$$\int_A^E \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt = min. \tag{54}$$

Die Nebenbedingung ist diesmal die Kugelformel

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \tag{55}$$

Subtraktion von r^2

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \tag{56}$$

Addieren der Nebenbedingung mit Lagrange-Multiplikatoren

$$\int_A^E \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = min. \tag{57}$$

Berechnung der Ableitung nach allen Koordinaten

$$\frac{\delta f}{\delta x} = 2\lambda x \tag{58}$$

$$\frac{\delta f}{\delta y} = 2\lambda y \tag{59}$$

$$\frac{\delta f}{\delta z} = 2\lambda z \tag{60}$$

$$\frac{\delta f}{\delta \dot{x}} = \frac{2\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \tag{61}$$

$$\frac{\delta f}{\delta \dot{y}} = \frac{2\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \tag{62}$$

$$\frac{\delta f}{\delta \dot{z}} = \frac{2\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \tag{63}$$

Einsetzen der Ableitungen in die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$2\lambda x - \frac{d}{dt}(\frac{2\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}) = 0 \tag{64}$$

$$2\lambda y - \frac{d}{dt}(\frac{2\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}) = 0 \tag{65}$$

$$2\lambda z - \frac{d}{dt}(\frac{2\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}) = 0 \tag{66}$$

Partielle Ableitung nach der Zeit ergibt die Lagrangegleichungen

$$2\lambda x - \frac{2\ddot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{2\dot{x}(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{67}$$

$$2\lambda y - \frac{2\ddot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{2\dot{y}(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{68}$$

$$2\lambda z - \frac{2\ddot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} - \frac{2\dot{z}(2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z})}{\sqrt{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}} = 0 \tag{69}$$

Übungsaufgabe 3

Verwendung von Kugelkoordinaten mit der Konstanten R

$$\begin{aligned} x(t) &= Rsin\theta(t)cos\phi(t) && (70)\\ y(t) &= Rsin\theta(t)sin\phi(t) && (71)\\ z(t) &= Rcos\theta(t) && (72) \end{aligned}$$

Ableitung der Umrechnungsformel nach t

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Rcos\theta(t)\dot{\theta}(t)cos\phi(t) - Rsin\theta(t)sin\phi(t)\dot{\phi}(t) && (73)\\ \dot{y}(t) &= Rcos\theta(t)\dot{\theta}(t)sin\phi(t) + Rsin\theta(t)cos\phi(t)\dot{\phi}(t) && (74)\\ \dot{z}(t) &= -Rsin\theta(t)\dot{\theta}(t) && (75) \end{aligned}$$

Einsetzen der Formeln gibt unter der Wurzel den Ausdruck

$$\begin{aligned} R^2cos^2\theta\dot{\theta}^2cos^2\phi - \quad & 2R^2cos\theta sin\theta cos\phi sin\phi\dot{\phi} \quad & +R^2sin^2\theta sin^2\phi\dot{\phi}^2 + && (76)\\ R^2cos^2\theta\dot{\theta}^2sin^2\phi + \quad & 2R^2cos\theta sin\theta cos\phi sin\phi\dot{\phi} \quad & +R^2sin^2\theta cos^2\phi\dot{\phi}^2 + && (77)\\ & R^2sin^2\theta\dot{\theta}^2 & && (78) \end{aligned}$$

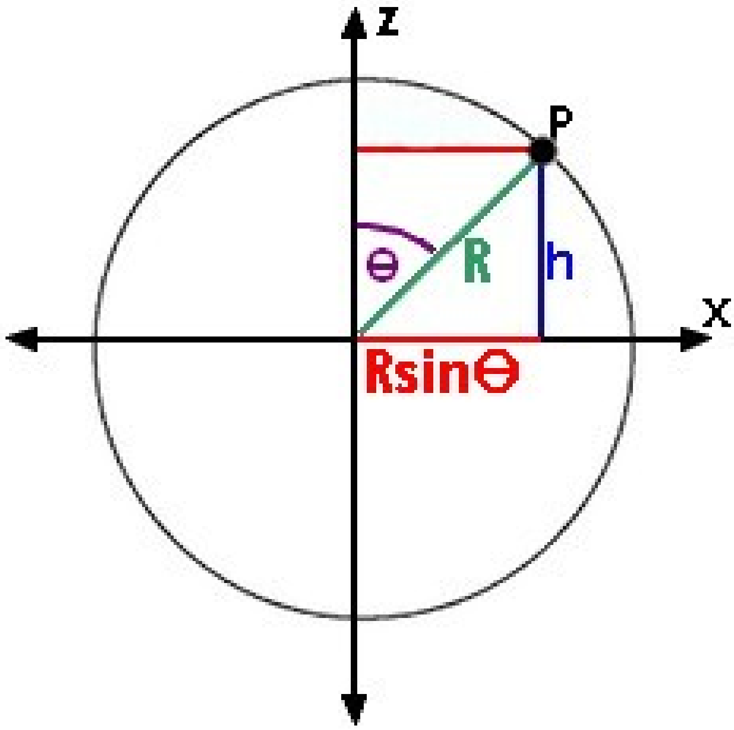
Links und rechts Pythagoras am Einheitskreis herausheben
Der mittlere Term fällt in Zeile 76 und 77 ganz weg

$$\int_A^E \sqrt{R^2cos^2\theta\dot{\theta}^2 + R^2sin^2\theta\dot{\phi}^2 + R^2sin^2\theta\dot{\theta}^2}dt \qquad (79)$$

Links und rechts Pythagoras am Einheitskreis herausheben

$$\int_A^E \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2sin^2\theta\dot{\phi}^2}dt \qquad (80)$$

Alternativ hätte man sich das Wegintegral auch grafisch überlegen können



Der Kreis an dem die ϕ-Koordinate gemessen wird, hat den Radius $Rsin\theta$

Bilden der Ableitungen nach den Ortskoordinaten

$$\frac{\delta f}{\delta \phi} = 0 \tag{81}$$
$$\frac{\delta f}{\delta \theta} = \frac{2R^2 sin\theta cos\theta\dot{\theta}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}} \tag{82}$$
$$\frac{\delta f}{\delta \dot{\phi}} = \frac{2R^2 sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}} \tag{83}$$
$$\frac{\delta f}{\delta \dot{\theta}} = \frac{2R^2\dot{\theta}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}} \tag{84}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$-\frac{d}{dt}\left(\frac{2R^2 sin^2\theta\dot{\phi}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}}\right) = 0 \tag{85}$$
$$\frac{2R^2 sin\theta cos\theta\dot{\theta}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{2R^2\dot{\theta}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}}\right) = 0 \tag{86}$$

Berechnung der Ableitung nach der Zeit

$$-\frac{4R^2 sin\theta\dot{\theta}\dot{\phi} + 2R^2 sin^2\theta\ddot{\phi}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}} - \frac{2R^2 sin^2\theta\dot{\phi}(2R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2R^2 sin\theta cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}^2 + 2R^2 sin^2\theta\ddot{\phi})}{\sqrt{(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2)^3}} = 0 \tag{87}$$

$$\frac{2R^2 sin\theta cos\theta\dot{\theta} - 2R^2\ddot{\theta}}{\sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2}} - \frac{2R^2\dot{\theta}(2R^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + 2R^2 sin\theta cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}^2 + 2R^2 sin^2\theta\dot{\phi}\ddot{\phi})}{\sqrt{(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2)^3}} = 0 \tag{88}$$

Übungsaufgabe 4

Die Hauptbedingung ist die Formel für die Wirkung

$$\frac{mv^2}{2} + \int_A^E F(x)dx = \text{stationär} \tag{89}$$

Berechnung der Ableitungen

$$\frac{\delta L}{\delta x} = F(x) \tag{90}$$

$$\frac{\delta L}{\delta v} = mv \tag{91}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$F(x) - \frac{d}{dt}(mv) = 0 \tag{92}$$

Berechnung der Zeitableitung

$$F(x) - ma = 0 \tag{93}$$

Nach F(x) umstellen

$$F(x) = ma \tag{94}$$

Übungsaufgabe 5

Die Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
Einsetzen der konstanten Fallbeschleunigung -g ergibt

$$F(x) = -mg \tag{95}$$

Die Gravitation wirkt nur entlang der z-Koordinate.
Die Formel für die Wirkung lautet daher

$$\frac{mv^2}{2} - \int_A^E -mgdz \tag{96}$$

Berechnung des Integrals

$$\frac{mv^2}{2} + mgz \tag{97}$$

Die Zwangsbedingungen lauten

$$y = C \tag{98}$$
$$x = z + K \tag{99}$$

Man kann den Ursprung des Koordinatensystems so legen,
dass beide Konstanten 0 sind

$$y = 0 \tag{100}$$
$$x = z \tag{101}$$

Die generalisierte Koordinate ist die um 45° gedrehte x-Koordinate

$$X = x - z \tag{102}$$

Da es zwei Zwangsbedingungen und nur einen Körper gibt,
benötigt man nur eine Koordinate.

$$3K - Z = 3 - 2 = 1 \tag{103}$$

Um die Zwangskraft zu berechnen,
muss man die Lagrangegleichungen 1. Art verwenden

$$\frac{mv^2}{2} + mgz + \lambda_1 y + \lambda_2(x - z) \tag{104}$$

Einsetzen der Betragsformel für die Geschwindigkeit

$$\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)}{2} + mgz + \lambda_1 y + \lambda_2(x - z) \tag{105}$$

Die Geschwindigkeit in y-Richtung ist laut Angabe 0

$$\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)}{2} + mgz + \lambda_1 y + \lambda_2(x - z) \tag{106}$$

Berechnung der Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta x} &= \lambda_2 && (107)\\ \frac{\delta L}{\delta y} &= \lambda_1 && (108)\\ \frac{\delta L}{\delta z} &= mg - \lambda_2 && (109)\\ \frac{\delta L}{\delta \dot{x}} &= m\dot{x} && (110)\\ \frac{\delta L}{\delta \dot{y}} &= 0 && (111)\\ \frac{\delta L}{\delta \dot{z}} &= m\dot{z} && (112) \end{aligned}$$

Zusätzlich müssen auch die Zwangsbedingungen gelten

$$\begin{aligned} y &= 0 && (113)\\ x - z &= 0 && (114) \end{aligned}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \lambda_2 - \frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0 && (115)\\ \lambda_1 &= 0 && (116)\\ mg - \lambda_2 - \frac{d}{dt}(m\dot{z}) &= 0 && (117) \end{aligned}$$

Berechnung der Ableitungen

$$\begin{aligned} \lambda_2 - m\ddot{x} &= 0 && (118)\\ \lambda_1 &= 0 && (119)\\ mg - \lambda_2 - m\ddot{z} &= 0 && (120) \end{aligned}$$

Umformen nach λ_2

$$\lambda_2 = m\ddot{x} = mg - m\ddot{z} \qquad (121)$$

Aus der Anfangsbedingung x=z folgt $\ddot{x} = \ddot{z}$

$$\lambda_2 = m\ddot{x} = mg - m\ddot{x} \qquad (122)$$

Umformen des zweiten Teils der Gleichung nach $\ddot{x}$

$$\ddot{x} = \frac{g}{2} \qquad (123)$$

Einsetzen in Gleichung 122

$$\lambda_2 = \frac{mg}{2} \tag{124}$$

Multiplikation mit dem Gradient der Zwangsbedingung

$$Z_1 = 0 \tag{125}$$

$$Z_2 = \frac{mg}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \tag{126}$$

Die erste Zwangskraft ist 0. Keine Kraft versucht den Körper aus der Schiene zu bewegen, folglich muss die Schiene auch keine Kraft ausüben.

Die zweite Zwangskraft muss die Gravitation durch die schiefe Ebene ausgleichen. In x-Richtung wirkt die halbe Schwerkraft, damit der Körper nicht gerade hinunterfällt und in z-Richtung wirkt die halbe Schwerkraft, damit der Körper nur mit halber Geschwindigkeit herunterfällt, sodass die halbe Schwerkraft in x-Richtung genügt.