Theoretische Physik

Noether-Theorem

Das Anwenden der Variationsrechnung auf das Prinzip der stationären Wirkung führt auf einige physikalische Gesetze und Zusammenhänge. Im Skriptum über die Variationsrechnung wurde beispielsweise der Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung hergeleitet.

Neben solchen bereits bekannten Gesetzmäßigkeiten entdeckt man mit dieser Methode auch neue, mit anderen Methoden nicht nachvollziehbare Zusammenhänge. Der wahrscheinlich überraschendste ist das Noether-Theorem, ein Zusammenhang zwischen der kontinuierlichen Symmetrie des Potentials und den Erhaltungsgrößen.

Erklärung: Symmetrien

Das Wort „Symmetrie“ ist ähnlich wie das Wort Arbeit ein Wort, das in der Physik etwas anders als im Alltag verwendet wird.

Im Alltag verwendet man meistens das Wort „symmetrisch“ gleichbedeutend mit spiegelsymmetrisch, das heißt der Körper ändert sich nicht, wenn er gespiegelt wird.

In der Physik gibt es zusätzlich noch ganz andere Arten von Symmetrien: Beispielsweise ist ein Würfel symmetrisch bezüglich einer Drehung um 90° oder ein Zylinder symmetrisch bezüglich einer Drehung entlang der ϕ-Koordinate.

Man unterscheidet zwischen kontinuierlichen und diskreten Symmetrien. Bei diskreten Symmetrien gibt es eine konkrete Anzahl von Abbildungen entlang einer Koordinate (zum Beispiel beim Würfel 90°, 180° und 270°), die keine Änderung auslösen. Bei kontinuierlichen Symmetrien kann man den Körper beliebig weit entlang einer Koordinate drehen, ohne dass sich der Körper ändert (zum Beispiel ist beim Zylinder jede Drehung entlang der ϕ-Koordinate möglich).

Ein Körper kann auch mehrere Symmetrien gleichzeitig erfüllen. Beispielsweise kann ein Zylinder nicht nur kontinuierlich in Richtung der ϕ-Koordinate, sondern auch diskret um 180° entlang der θ-Koordinate gedreht werden. Außerdem kann er um alle Achsen, die in der Mitte durch den Zylinder durchgehen gespiegelt werden.

Übungsaufgabe 1

Welche Symmetrien gelten für einen Kegel?

Link zur Lösung

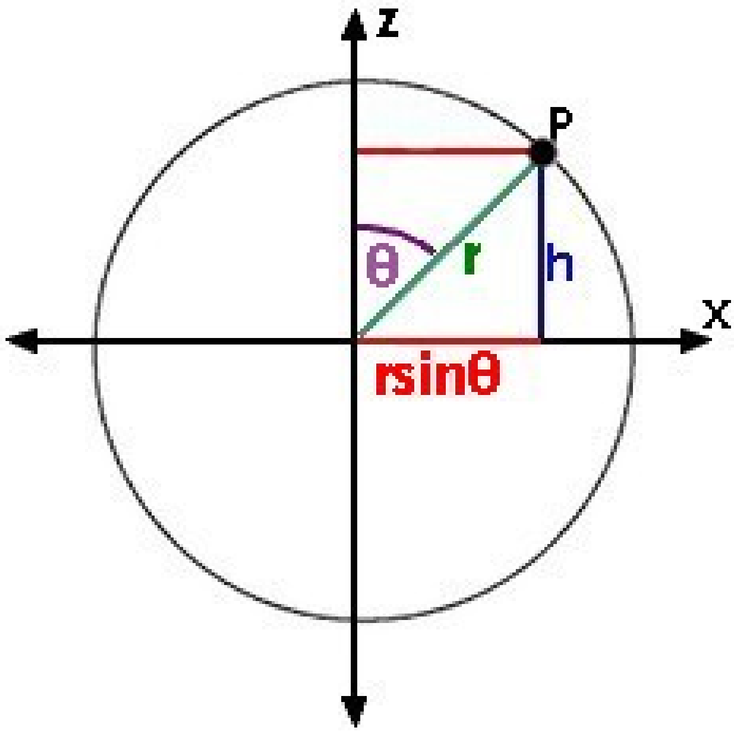
Anwendung: Gravitationsfeld

Die Stärke des Gravitationsfeldes ist nur von der r-Koordinate abhängig. Eine Drehung des Feldes entlang der ϕ-Koordinate oder entlang der θ-Koordinate führt zu keiner Änderung des Feldes. Es handelt sich dabei um kontinuierliche Symmetrieachsen.

Man bezeichnet die kontinuierlichen Symmetrieachsen, als zyklische Koordinaten. Um die kontinuierliche Symmetrie auszunutzen, muss man die generalisierten Koordinaten so wählen, dass die zyklischen Koordinaten vorkommen. In dieser Anwendung erreicht man das durch die Wahl von Kugelkoordinaten, deren Ursprung im Zentrum des Gravitationsfeldes liegt.

Statt dem Betrag der Geschwindigkeit $(x^2 + y^2 + z^2)$ in kartesischen Koordinaten setzt man in die Formel der kinetischen Energie den Betrag in Kugelkoordinaten ein. Das ist nach wie vor der Pythagoras, weil die Koordinaten immer noch im rechten Winkel aufeinander stehen. Allerdings muss man die Winkelkoordinaten mit den jeweiligen Kreisradien multiplizieren, damit die Einheit nach wie vor in Metern angegeben ist.

Der Radius des Kreises der θ-Koordinate entspricht der r-Koordinate, der Radius des Kreises der ϕ-Koordinate ist $rsin\theta$



Beim Einsetzen des Potentials kann man den Vorteil der kontinuierlichen Symmetrie entlang der ϕ-Koordinate und der θ-Koordinate ausnutzen, und muss nur noch eine r-Abhängigkeit in die Klammer schreiben.

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 sin^2\theta\dot{\phi}^2) + U(r) \tag{1}$$

Die Ableitung nach der ϕ-Koordinate und nach der θ-Koordinate ist 0, sodass in den Lagrangegleichungen dieser Koordinaten nur noch die Ableitungen nach den Winkelgeschwindigkeiten über bleiben.

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \tag{2}$$

$$\frac{\delta L}{\delta\dot{\phi}} = mr^2 sin^2\theta\dot{\phi} \tag{3}$$

Einsetzen dieser Beziehungen in die Euler-Lagrange-Gleichungen führt auf die Gleichungen

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \tag{4}$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2 sin^2\theta\dot{\phi}) = 0 \tag{5}$$

Da die zeitliche Ableitung der Größen in den Klammern 0 ist, bedeutet das, dass die Größen in den Klammern immer gleich groß bleiben, also erhalten sind. Man erkennt, dass in beiden Gleichungen das Quadrat des Radius der Kugel mit dem Impuls entlang der Koordinate multipliziert wird. Es handelt sich bei den Größen um die Drehimpulserhaltung entlang beider Koordinaten.

Auch wenn man sich nicht für die Erhaltungsgrößen, sondern nur für die Bewegungsgleichungen interessiert, ist es von Vorteil, wenn man die zyklischen Koordinaten zum Aufstellen der Lagrangegleichungen verwendet, weil bei zwei Koordinaten die Ortsableitung ganz weg fällt, sodass die Differentialgleichungen deutlich kürzer werden.

Übungsaufgabe 2

Berechne die Erhaltungsgrößen für ein zylindersymmetrisches Magnetfeld um einen geladenen Leiter!

Link zur Lösung

Verallgemeinerung: Raum- und Zeitkoordinaten

Im Allgemeinen führt jede kontinuierliche Transformation auf eine Erhaltungsgröße und zwar unabhängig davon, ob es sich um Raum- oder Zeitkoordinaten handelt.

Raumkoordinaten

Bei Raumkoordinaten kann man das Noethertheorem zeigen, indem man eine unbekannte Ortskoordinate q als zyklisch voraussetzt. Wenn man die generalisierten

Koordinaten so wählt, dass eine der Ortskoordinaten zyklisch ist, kann man in der Lagrangegleichung für die zyklische Koordinate

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}) - \frac{\delta L}{\delta q} = 0 \tag{6}$$

den letzten Term 0 setzen. Man erhält

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}) = 0 \tag{7}$$

Das bedeutet, dass man die Erhaltungsgröße erhält, indem man die Lagrangegleichung nach der Geschwindigkeit entlang der zyklischen Koordinate ableitet. Man bezeichnet diese Größe als kanonischen Impuls. Bei kartesischen Koordinaten handelt es sich um den gewöhnlichen Impuls entlang der zyklischen Koordinate, bei zu Kreisen verdrehten Koordinaten um den Drehimpuls entlang der zyklischen Koordinate.

Zeitkoordinate

Eine kontinuierliche Symmetrie entlang der Zeitkoordinate ist immer dann vorhanden, wenn sich das Potential im Verlauf der Zeit nicht verändert. In dem Fall kann man beliebige generalisierte Koordinaten verwenden. Die einzige Änderung ist, dass das Potential nur noch von den Ortskoordinaten und nicht mehr von der Zeitkoordinate abhängt.

$$\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q) \tag{8}$$

Man könnte jetzt auf die Idee kommen, dass man den ersten Term der Lagrangefunktion $\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}})$ 0 setzt. Das geht jedoch nicht, weil die Geschwindigkeit nach wie vor zeitabhängig sein kann (der Körper befindet sich nicht immer an der gleichen Stelle des Potentials). Die Ableitung eines konstanten Potentials nach einer zeitabhängigen Geschwindigkeit ist zeitabhängig.

Man kann aber einen anderen Trick verwenden: Wenn man die Lagrangefunktion nach der Zeit ableitet, muss die Erhaltungsgröße gleich 0 sein. Da die Zeitkoordinate nur implizit im Ort und in der Geschwindigkeit vorkommt, erhält man die äußere Ableitung nach dem Ort und nach der Geschwindigkeit. Als innere Ableitung des Ortes erhält man die Geschwindigkeit und als innere Ableitung der Geschwindigkeit die Beschleunigung

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\delta L}{\delta q}\dot{q} + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\ddot{q} \tag{9}$$

Um die Erhaltungsgröße zu berechnen, muss man die Euler-Lagrange-Gleichungen einbeziehen. Diese kann man nach dem Term $\frac{\delta L}{\delta q}$ umformen

$$\frac{\delta L}{\delta q} = \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}) \tag{10}$$

und das Ergebnis in Gleichung 9, statt dem $\frac{\delta L}{\delta q}$-Term einsetzen.

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}})\dot{q} + \frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\ddot{q} \tag{11}$$

Man kann im rechten Teil der Gleichung die Kettenregel erkennen: Im ersten Term steht der kanonische Impuls nach der Zeit abgeleitet und die Geschwindigkeit normal, im zweiten Term die Geschwindigkeit nach der Zeit abgeleitet und der kanonische Impuls normal. Damit verkürzt sich die Gleichung zu

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\dot{q}) \tag{12}$$

Man kann den linken Teil der Gleichung von der rechten Seite abziehen. Da dieser ebenfalls eine Zeitableitung ist, kann man ihn mittels Summenregel ins Integral schreiben.

$$\frac{d}{dt}(\frac{\delta L}{\delta \dot{q}}\dot{q} - L) = 0 \tag{13}$$

Der Term innerhalb der Klammer ist nach der Zeit abgeleitet 0 und folglich eine Erhaltungsgröße. Um die physikalische Bedeutung zu sehen, kann man die allgemeine zeitunabhängige Lagrangefunktion in die Gleichung einsetzen.

$$m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) = E_{kin} + E_{pot} = E_{ges} \tag{14}$$

Aus einem zeitunabhängigen Potential folgt die Energieerhaltung. Das ist wenig überraschend, weil sich bei einem konstanten Potentialfeld die Kraft nicht ändert und daher keine zusätzliche Energie ausgelöst oder vorhandene Energie vernichtet werden kann.

Allgemeiner Vorgang

Manchmal ist es garnicht möglich, die generalisierten Koordinaten so zu wählen, dass die zyklische Koordinate darin vorkommt, zum Beispiel weil sich die zyklischen Koordinaten zeitlich verändern. In so einem Fall ist es gut, wenn man einen Vorgang kennt, mit dem man die jeweilige Erhaltungsgröße aus der kontinuierlichen Transformation herleiten kann, ohne die Koordinaten zu ändern.

Wenn die zyklische Koordinate eine reine Raumkoordinate ist, lautet die Formel:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i}\frac{\delta \hat{q}_i}{\delta \epsilon}|_{\epsilon=0} \tag{15}$$

Wenn es sich um eine reine Zeitkoordinate handelt, lautet die Formel:

$$\sum_{i=1}^{n}(L - \frac{\delta L}{\delta \dot{q}_i})\frac{\delta \hat{t}}{\delta \epsilon}|_{\epsilon=0} \tag{16}$$

Wenn die zyklische Koordinate weder entlang der Raum- noch entlang der Zeitkoordinate konstant ist, werden die Formeln 15 und 16 addiert.

Um die Formel anzuwenden, berechnet man zuerst den Wert $\hat{q}$ bzw. $\hat{t}$. Das Dach über dem Zeichen bedeutet: "Die Auswirkung auf die q bzw. t-Koordinate, wenn man das System um einen beliebig kleinen Faktor ϵ entlang der zyklischen Koordinate verschiebt."

Wenn beispielsweise die ϕ-Zylinderkoordinate zyklisch ist und man die Änderung in kartesischen Koordinaten angeben möchte, dreht man den Vektor mit der Drehmatrix um den Winkel ϵ

$$\begin{pmatrix} \text{x} \\ \text{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\epsilon & \sin\epsilon \\ \text{-}\sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{x}\cos\epsilon - y\sin\epsilon \\ \text{x}\sin\epsilon + y\cos\epsilon \end{pmatrix} \tag{17}$$

und erhält damit nach der Drehung die Koordinaten

$$\hat{x} = x\cos\epsilon - y\sin\epsilon \tag{18}$$

$$\hat{y} = x\sin\epsilon + y\cos\epsilon \tag{19}$$

Als nächstes leitet man die Funktion nach ϵ ab und setzt anschließend $\epsilon = 0$. Dadurch erhält man die infinitesimale Änderung der Lagrangefunktion entlang der zyklischen Koordinate an der Stelle $\epsilon = 0$. Diese Werte setzt man für alle Koordinaten in die Formel 15 bzw. 16 ein.

Übungsaufgabe 3

Berechne die Impuls-, Drehimpuls- und Energieerhaltung mit dem allgemeinen Vorgang in den kartesischen Koordinaten!

Link zur Lösung

Lösungen der Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Kontinuierliche Symmetrie entlang der ϕ-Koordinate
Spiegelsymmetrie um alle Achsen in der Mitte des Kegels

Übungsaufgabe 2

Verwendung von Zylinderkoordinaten

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2) + U(r) \tag{20}$$

Bilden der Ableitung nach $\dot{\phi}$ und $\dot{z}$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{\phi}} = mr^2\phi \tag{21}$$

$$\frac{\delta L}{\delta \dot{z}} = mz \tag{22}$$

Einsetzen in Lagrangegleichungen

$$\frac{d}{dt}(mr^2\phi) = 0 \tag{23}$$

$$\frac{d}{dt}(mz) = 0 \tag{24}$$

Drehimpulserhaltung entlang der ϕ-Koordinate
Impulserhaltung entlang der z-Koordinate

Übungsaufgabe 3

Da man immer die kartesischen Koordinaten verwenden soll, ist die Ableitung der Lagrangefunktion nach der Geschwindigkeit in allen Fällen $m\dot{q}$

Die **Impulserhaltung** folgt aus der Verschiebung entlang einer kartesischen Koordinate, das heißt bei der Verschiebung wird zu dieser Koordinate ϵ dazugezählt

$$\hat{q} = q + \epsilon \tag{25}$$

Die Ableitung von $\hat{q}$ nach ϵ ist 1. Bei allen anderen Koordinaten verschiebt sich überhaupt nichts, sodass kein ϵ vorkommt und die Ableitung nach ϵ folglich 0 ist. Übrig bleibt folglich nur mehr $m\dot{q}$ und das ist der Impuls entlang der q-Koordinate

Die **Drehimpulserhaltung** folgt aus der Verschiebung entlang des Winkels. In kartesischen Koordinaten ist das die Multiplikation mit der Drehmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{cos}\epsilon & \mathrm{sin}\epsilon \\ \text{-}\mathrm{sin}\epsilon & \mathrm{cos}\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{xcos}\epsilon - ysin\epsilon \\ \mathrm{xsin}\epsilon + ycos\epsilon \end{pmatrix} \tag{26}$$

Vergleich der Einträge liefert:

$$\hat{x} = xcos\epsilon - ysin\epsilon \tag{27}$$
$$\hat{y} = xsin\epsilon + ycos\epsilon \tag{28}$$

Für die z-Koordinate gilt $\hat{z} = z$, weil sich die durch das Drehen entlang des Winkels nicht ändert. Ableiten nach ϵ ergibt:

$$\frac{d\hat{x}}{d\epsilon} = -xsin\epsilon - ycos\epsilon \tag{29}$$
$$\frac{d\hat{y}}{d\epsilon} = xcos\epsilon - ysin\epsilon \tag{30}$$
$$\frac{d\hat{z}}{d\epsilon} = 0 \tag{31}$$

Einsetzen von $\epsilon = 0$ führt zu den Werten -y und x. Multipliziert mit der Ableitung der Lagrangefunktion nach der Geschwindigkeit und aufsummiert erhält man $-m\dot{x}y + m\dot{y}x$. Umformen führt zur Gleichung $m(x\dot{y} - y\dot{x})$ und das ist die z-Komponente des Drehimpulses:

$$r \times mv = \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \\ \mathrm{z} \end{pmatrix} \times m \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m(y\dot{z} - z\dot{y}) \\ m(z\dot{x} - x\dot{z}) \\ m(x\dot{y} - y\dot{x}) \end{pmatrix} \tag{32}$$

Man erhält die z-Komponente deshalb, weil man die Drehung in der xy-Ebene, also um die z-Achse, ausgeführt hat. Wenn man die Drehung in einer anderen Ebene ausführt, erhält man ganz analog die anderen Komponenten des Drehimpulses, das sind die Drehungen um die anderen Achsen.

Die **Energieerhaltung** folgt aus der Verschiebung entlang der t-Koordinate, das heißt bei der Verschiebung wird zu dieser Koordinate ϵ dazugezählt.

$$\hat{t} = t + \epsilon \tag{33}$$

Die Ableitung nach ϵ ist eins, so dass in allen Koordinaten $m\dot{q}$ überbleibt.

$$\frac{m\dot{q}}{2} - E_{pot} - m\dot{q} = -\frac{m\dot{q}}{2} - E_{pot} = -(E_{kin} + E_{pot}) = -E \tag{34}$$

Wenn -E konstant ist, ist auch E konstant.